

مفاهیم نقطه و خط از اساسی ترین مفاهیم در هندسه است.

تعریف: خط راست از هر دو طرف نامحدود است و برای رسم آن کافی است دو نقطه داشته باشیم.



نیم خط: خط راستی است که از یک طرف بسته است و از طرف دیگر نامحدود است.

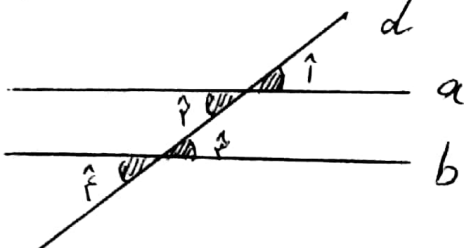


پاره خط: قسمتی از خط راست است که بین دو نقطه قرار دارد و باید عبارتی از هر طرف بسته است و آن را با نماد $\overline{AB}$ نمایش می دهیم.



دو خط موازی:

دو خط a و b را موازی گوئیم هرگاه در هیچ نقطه ای یکدیگر را قطع نکنند یا به عبارتی دیگر دو خط a و b را موازی گوئیم هرگاه خط مورب d دو خط a و b را قطع کند با هر دو زاویه های تند (یا باز) مساوی داشته باشد.

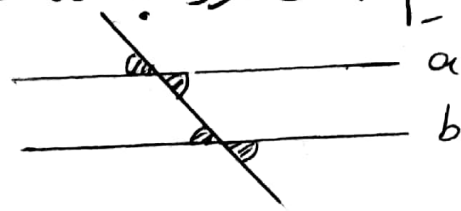
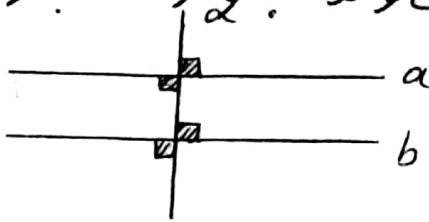


$$a \parallel b \Rightarrow \hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$$

مورب d

توجه: علامت موازی بودن دو خط را به صورت $a \parallel b$ خاصیتی دهیم و

توجه می‌کنیم که خط مورب d هر زاویه‌ای می‌تواند با a و b بسازد



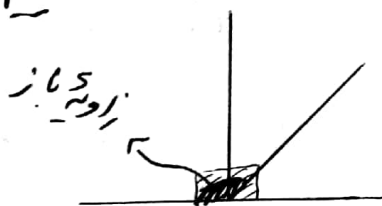
عکس این تعریف هم صادق است. به این معنی که اگر بدانیم دو خط a و b با یک هم موازی هستند و خط موربی این دو خط را قطع کند زاویه‌های بوجود آمده حتماً با هم مساوی هستند. (زاویه‌های تند با هم و زاویه‌های باز هم با هم مساوی هستند)

- چند تعریف در مورد زاویه‌ها:

زاویه تند (حاده): به زاویه‌های کوچکتر از 90° زاویه تند (حاده) می‌گوئیم.



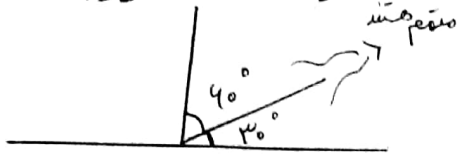
زاویه باز (منفرجه): به زاویه‌های بزرگتر از 90° زاویه باز (منفرجه) می‌گوئیم.



زاویه نیم صاف: به زاویه 180° درجه زاویه نیم صاف می‌گوئیم.



زاویه مستقیم: اگر مجموع دو زاویه 90° باشد، آن دو زاویه را مستقیم گوئیم.



$$30^\circ + 40^\circ = 90^\circ$$

زاویه مکمل: اگر مجموع دو زاویه 180° شود آن دو زاویه را مکمل گوئیم.



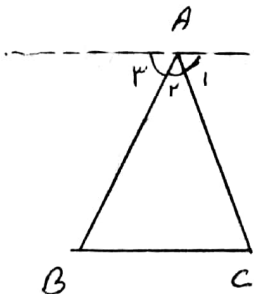
$$130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

زاویه های متقابل بر رأس: در هر دو خط متقاطع زاویه های روبرو به هم را متقابل بر رأس گوئیم و زاویه های متقابل بر رأس همیشه با هم برابرند.



چند قضیه در مورد زاویه ها:

قضیه ۱: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است.

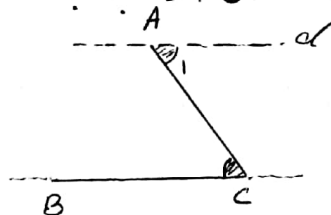


اثبات: برای اثبات این موضوع ابتدا خط d را

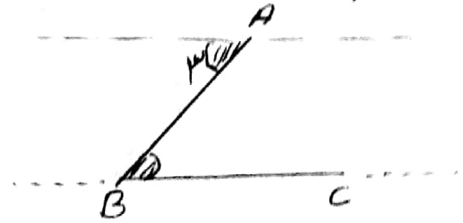
موازی با ضلع BC در مثلث ABC رسم می کنیم. اکنون

داریم $BC \parallel d$ ، حال با توجه به خط AC به عنوان محور و قضیه ی خطوط

موازی داریم: $\hat{A} = \hat{C}$ (از طرف دیگر این بار



خط موازی AB را برای دو خط موازی $d \parallel BC$ در نظر می‌گیریم. لذا داریم:



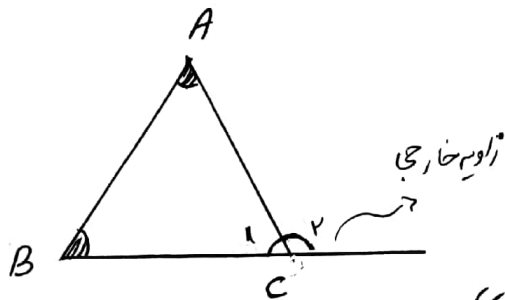
پس $B = \hat{A}_3$. از طرفی دیگر در شکل اول دیدیم که $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ و $\hat{A}_3$ مکمل هم

هستند یعنی $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ پس داریم:

$$\begin{cases} d \parallel BC, \text{ مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_1 = C \\ d \parallel BC, \text{ مورب } AB \Rightarrow \hat{A}_3 = B \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180 \\ \hat{C} + \hat{A}_2 + \hat{B} = 180 \end{cases}$$

که این به این معنی است که جمع زاویه‌های داخلی هر مثلث $\hat{A}_2 + B + C = 180^\circ$ است.

قضیه ۲: در هر مثلث، هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی روبرو.



به عبارتی دیگر $\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$.

اثبات:

با توجه به قضیه ۱ قبل می‌دانیم مجموع زاویه‌های

داخلی هر مثلث 180° است. پس $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ$. از طرفی همانطور که در شکل می‌بینیم

$\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ مکملند. یعنی $180^\circ = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$ ، لذا داریم:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 + \hat{B} + \hat{A} = 180^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}}$$

قضیه ۳: در هر مثلث، مجموع زاویه‌های خارجی برابر 360° است.

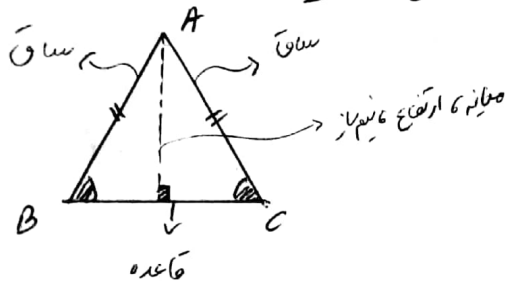
معرفی چند شکل هندسی و خواص آنها :

(۱) مثلث متساوی الساقین :

مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد را متساوی الساقین گوئیم ، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می نامیم .

(الف) در مثلث متساوی الساقین ، زاویه های روبه روب اضلاع متساوی با هم مساوی هستند .

(ب) در مثلث متساوی الساقین ، نیم سازه ارتفاع و میانه وارد بر قاعده برهم منطبق می شود .

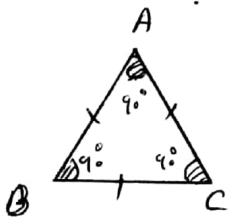


(۲) مثلث متساوی الاضلاع :

مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند ، متساوی الاضلاع نامیده می شود .

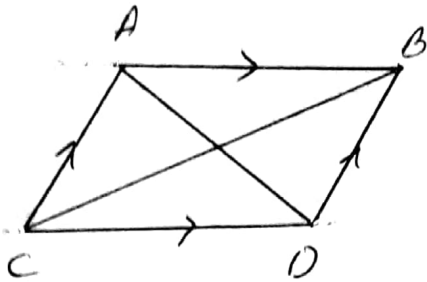
(الف) در هر مثلث متساوی الاضلاع ، هر سه زاویه با هم برابر (۹۰°) است .

(ب) اگر مثلثی داشته باشیم که سه زاویه آن با هم برابر بود می توان نتیجه گرفت سه ضلع آن با هم برابر است یا به عبارتی متساوی الاضلاع است .



(۳) متوازی الاضلاع :

متوازی الاضلاع چهار ضلعی است که ضلع‌های آن دو به دو موازی است و از موازی بودن دو به دو ی اضلاع نتیجه می‌شود که :



(الف) ضلع‌های روبرو با هم مساویند.

(ب) زاویه‌های روبرو با هم مساویند.

(ج) زاویه‌های مجاور با هم مکملند.

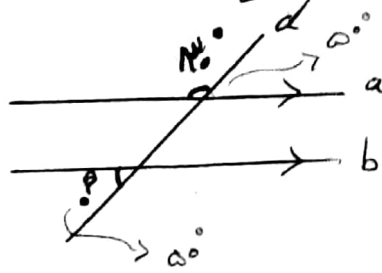
(د) قطر ها همدگر را نصف می‌کنند.

(۴) مستطیل : متوازی الاضلاعی است که زاویه‌های آن با هم مساوی و برابر 90° است.

(۵) لوزی : متوازی الاضلاعی است که ضلع‌های آن با هم برابر است.

(۶) مربع : متوازی الاضلاعی است که ضلع‌های آن با هم مساوی و چهار زاویه آن 90° است.

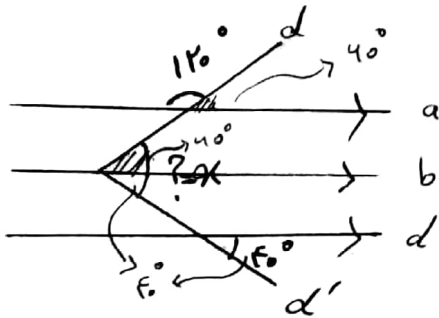
تمرین: در شکل های زیر، زاویه های خواسته شده را به دست آورید.



$$110 - 110 = 50^\circ$$

حال با توجه به تقریب خطوط موازی و مورب d تمام زاویه های

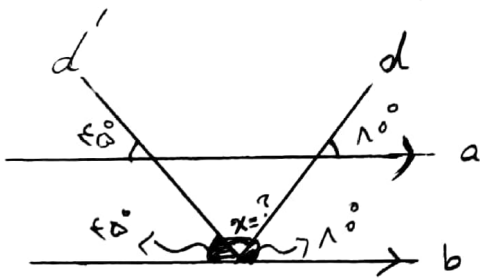
تساوی را بنویسید و زاویه های خواسته شده 50 است.



$a \parallel b$ و مورب d
با توجه به خطوط موازی زاویه های
تساوی را بنویسید

با توجه به $a \parallel d$ و مورب d' زاویه های تساوی را بنویسید

$$\Rightarrow 40^\circ + 40^\circ = 100^\circ \Rightarrow \boxed{x = 100^\circ}$$



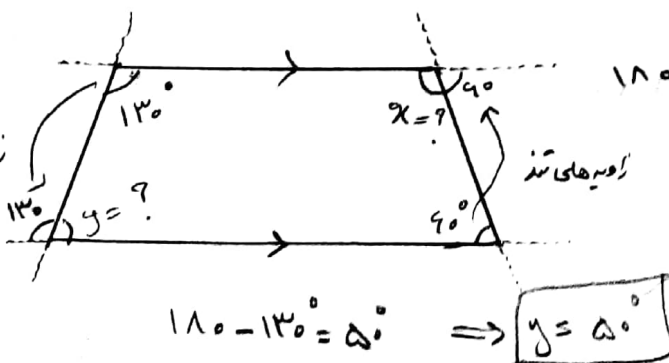
$a \parallel b$ و مورب d زاویه های تساوی را بنویسید و

$a \parallel b$ و مورب d' زاویه های تساوی را بنویسید و

$$45^\circ + x + 110^\circ = 180^\circ \quad (\text{زاویه های هم خط})$$

$$x + 125^\circ = 180^\circ$$

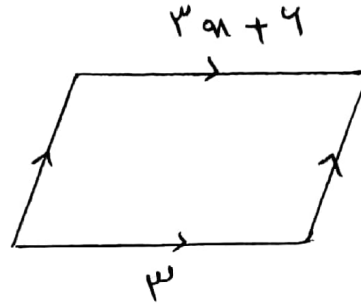
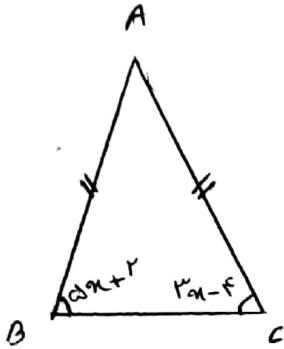
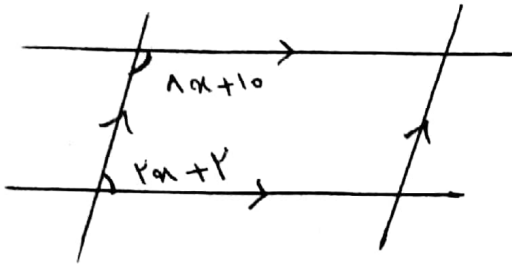
$$x = 180 - 125 = 55^\circ \Rightarrow \boxed{x = 55^\circ}$$



$$180 - 40 = 140^\circ \Rightarrow \boxed{x = 140^\circ}$$

$$180 - 130 = 50^\circ \Rightarrow \boxed{y = 50^\circ}$$

مَدَن ۲: در شکل های زیر اندازه x را به دست آورید.



نسبت و تناسب در هندسه:
به تساوی دو کسر تناسب می گوئیم که به صورت زیر می توان آن را نوشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \boxed{ad = bc}$$

در برخی از موارد وقتی دو کسر با هم مساوی می شوند و یکی از صورت یا مخرج ها نامعلوم است (مجهول) می توان به طریق زیر آن را به دست آورد.

مثال

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{3 \times 10}{5} = 6 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

بعضی از خواص تناسب:

اگر دو کسر با هم مساوی باشند می توان مقدار خرج ها را به صورت اضافه کردن و این تناسب

الف) دوباره حفظ شود

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}}$$

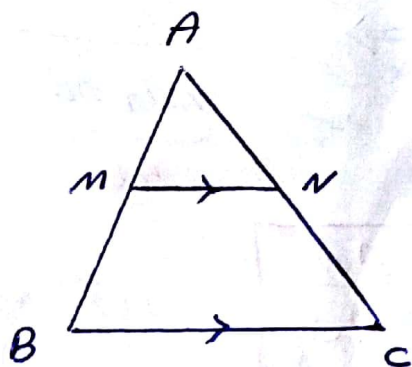
* (رکب به جزیه)

یا برعکس می توان مقدار صورت ها را در خرج ها جمع زد و دوباره تناسب حفظ شود.

ب) ** (جزیه به کل)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b+a} = \frac{c}{c+d}}$$

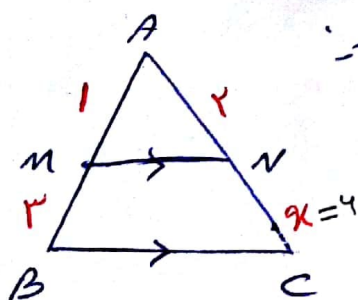
قضیه تالس: هرگاه دو خط موازی با یکی از اضلاع باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت روی مثلث چهارپاره خط جدا می کند که اندازه ی آن ها روی هم تشکیل یک تناسب می دهد.



$$\boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}}$$

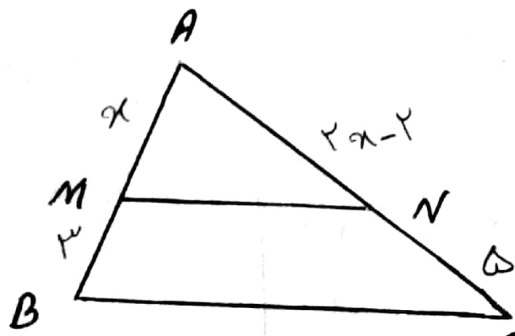
مثال) در شکل دورو $MN \parallel BC$ است، مقدار x را به دست آورید.

چون $MN \parallel BC$ است با توجه به قضیه ی تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

مسئله (سوال) در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است ، مقدار x را به دست آورید .



چون $MN \parallel BC$ است با توجه به قضیه ی تالس

داریم :

$$\frac{x}{3} = \frac{(2x-2)}{5}$$

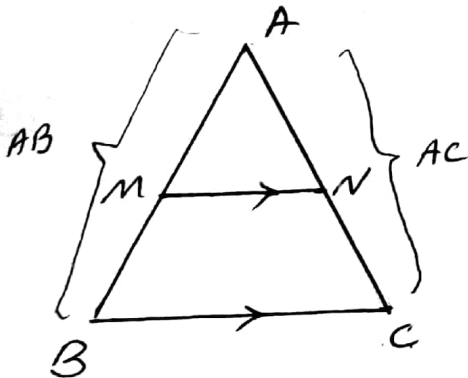
و طبق خواص تناسب می توان نوشت :

$$5x = 3(2x-2)$$

$$5x = 6x - 6$$

$$6 = 6x - 5x \Rightarrow \boxed{x=6}$$

توجه : با توجه به خاصیت های تناسب که قبلاً اشاره شد ، در قضیه ی تالس می توان رابطه ی زیر را هم بدست آورد :



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow[\text{مقدار صورت و مخرج اضافه شود}]{\text{مقدار صورت و مخرج اضافه شود}}$$

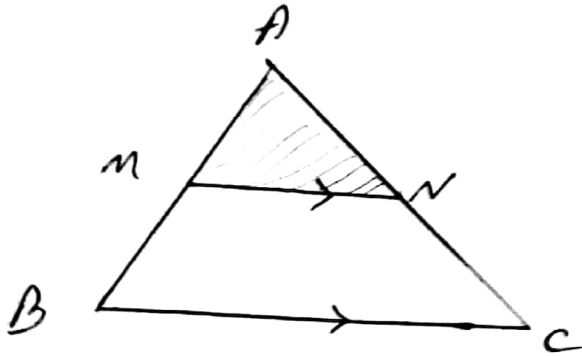
$$\frac{AM}{AM+MB} = \frac{AN}{AN+NC}$$

$\underbrace{AM+MB}_{AB} \quad \underbrace{AN+NC}_{AC}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}} \quad (\text{جزء به کل})$$

تقسیم قضیه‌ی تالس:

اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند به طوری که با ضلع سوم موازی باشد، مثلث جدیدی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اضلاع مثلث اصلی متناسب است.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

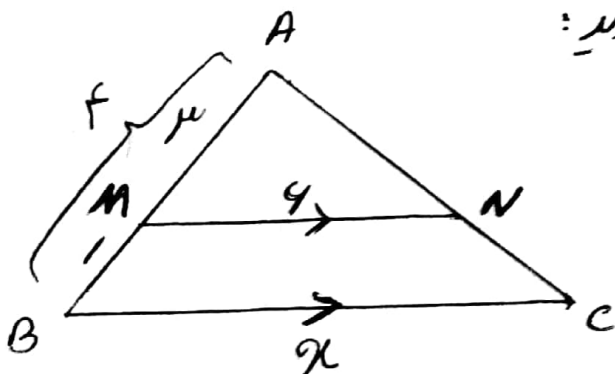
توجه: توجه می‌کنیم در قضیه‌ی تالس فقط تناسب جزء به جزء اضلاع مثلث را

دستیم یعنی $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ولی در تقسیم قضیه‌ی تالس تناسب جزء به کل

و همچنین تناسب ضلع سوم مثلث با خط موازی رسم شده را هم داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

مثال) در شکل روبرو مقدار x را به دست آورید:



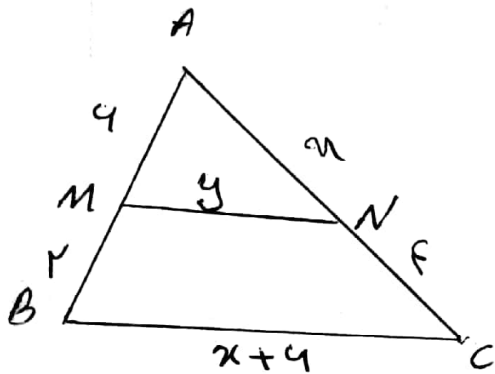
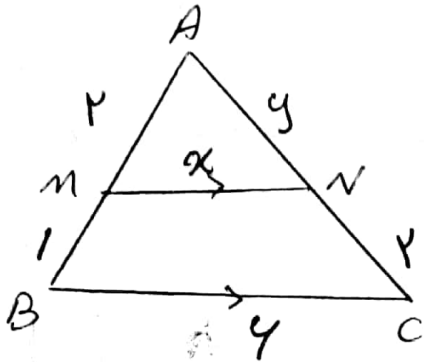
با توجه به تقسیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3+4} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \times 7}{3} = 10$$

تحریر:

۱- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. مقدار x و y را به دست آورید.

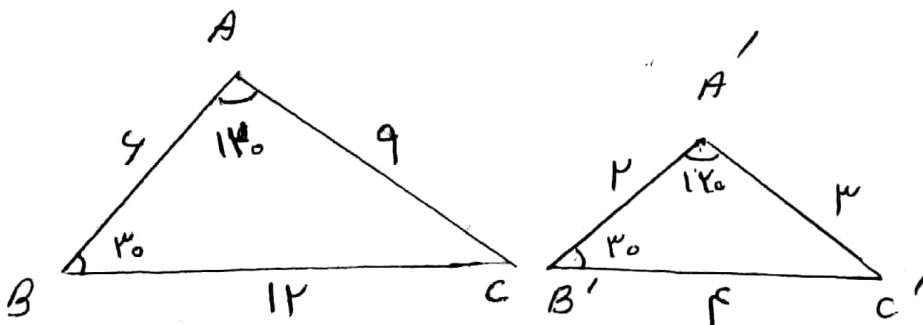


- ۲

تساوی:

دو چند ضلعی را متساوی گوئیم هرگاه زاویه های نظیر آن ها با هم برابر و اضلاع نظیر آن ها متناسب باشند.

توجه: به نسبت اضلاع نظیر در دو چند ضلعی نسبت تساوی گفته می شود.



$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}} \quad (\text{مثال})$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{2} = (2)$$

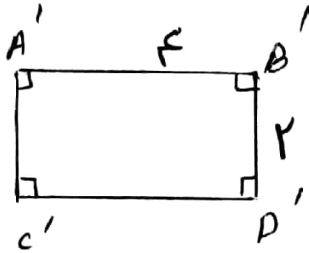
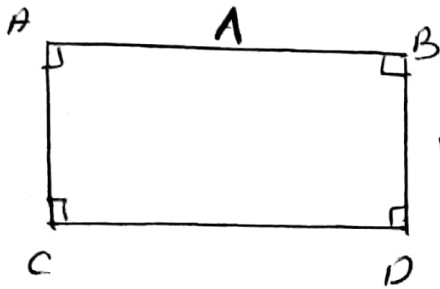
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{9}{3} = (3)$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{12}{4} = (3) \rightarrow$$

نسبت تساوی

توجه: برای اینکه بدانیم دو مثلث متساویه هستند یا نه، ابتدا زاویه‌ها را بررسی می‌کنیم.
 باید زاویه‌های نظیر با هم برابر باشند و بعد از آن نسبت کسایه همه‌ی ضلع‌ها
 نظیر باید با هم برابر باشند، یعنی همه‌ی ضلع‌ها یا به یک اندازه بزرگتر شوند یا
 کوچکتر.

(مثال)



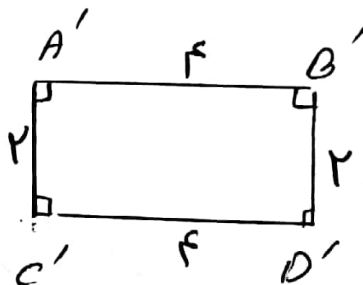
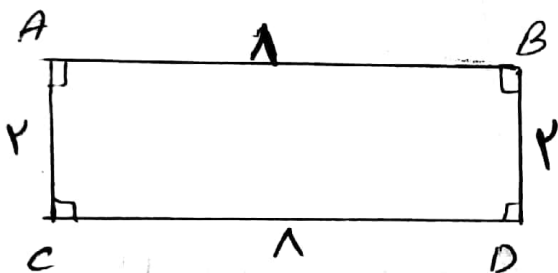
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{4}{2} = 2$$

پس دو مستطیل متساویه هستند.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

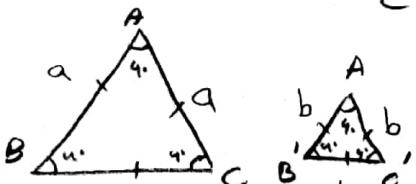
$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{2}{2} = 1$$

پس دو مستطیل متساویه نیستند.

چون همه‌ی نسبت‌ها برابر نیست.

سؤال: آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع با هم متساویه هستند.

بله، زیرا هر مثلث متساوی الاضلاع سه زاویه مساوی ۶۰° و سه ضلع مساوی دارد. پس

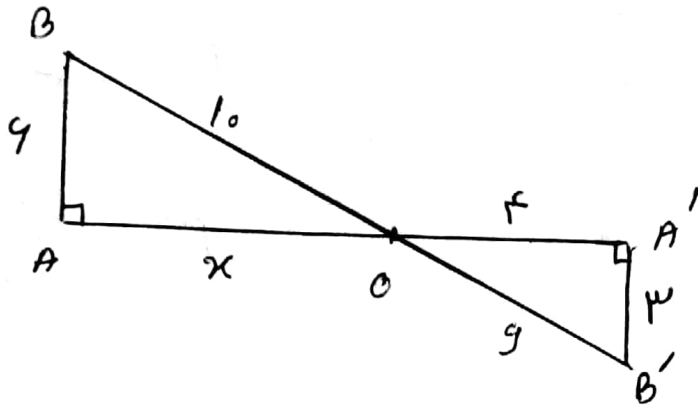


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{a}{b}$$

تمرین: دو مثلث زیر متشابه هستند، مقادیر x و y را بدست آورید.



چون دو مثلث
متشابه هستند $\Rightarrow$

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

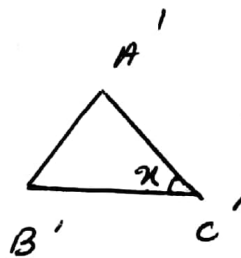
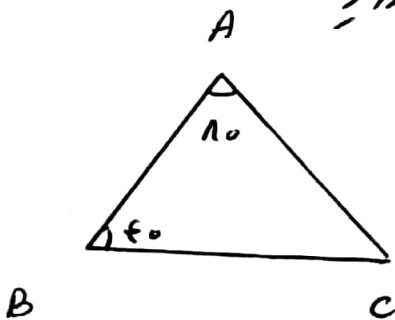
$$\boxed{\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \times 4}{3} = 1$$

$$\boxed{\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{3 \times 10}{4} = 5$$

تمرین ۱۲: دو مثلث زیر متشابه هستند، مقادیر x را بدست آورید.



چون دو مثلث متشابه هستند پس زاویه های
آن ها با هم برابر است پس

$$110 + 40 = 150$$

$$180 - 150 = 30 \Rightarrow \boxed{x = 30}$$