

* بستلی *

* حنجره، راسی کمی *

* در تمام رشته‌ها *

* مقطع کاردانی *

* مدرس : سعادت روزبهانی *

تابع

تعریف زوج مرتب: هر دوایی باشد (a, b) را یک زوج مرتب می‌نامند.

تعریف رابطه: مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را، رابطه می‌نامند.

تعریف تابع: رابطه‌ای است، مؤلفه‌های اول مساوی ندارد، اگر مؤلفه‌های اول

مختلف مساوی باشد، باید مؤلفه دوم نیز با هم مساوی باشد.

مثال کدام رابطه یک تابع است.

الف $f = \{(1, 7), (2, 7), (-4, 7)\}$ ✓ تابع است

ب $g = \{(-2, 3), (4, 1), (-2, 5)\}$ ✗ تابع نیست

پ $h = \{(-1, 0), (2, 5), (-1, 0)\}$ ✓ تابع است

نکته: مؤلفه‌های اول هر تابع را نامبر مؤلفه‌های دوم هر تابع را برد می‌نامند.

* توابع چند جمله‌ای: هر تابع به فرم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک

تابع چند جمله‌ای می‌نامند. دامنه توابع چند جمله‌ای، همواره اعداد حقیقی است.

مثال، دانسته توابع زیر را درجه آورید:

۱, $f(x) = x^2 - 5x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

۲, $g(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$

$D_g = \mathbb{R}$

* توابع کسری، هر تابع به فرم $g = \frac{f(x)}{g(x)}$ و f و g چند جمله‌ای هستند.

توابع کسری می‌توانند دانسته توابع کسری صورت زیر را داشته باشند:

$D_g = \mathbb{R} - \{\text{ریشه مخرج}\}$

مثال، دانسته سبک را درجه آورید.

۱, $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$

$x-5=0 \rightarrow x=5$

$D_f: \mathbb{R} - \{5\}$ ✓

۲, $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x+4)}$

$(x-2)(x+4) = 0$

✓

↘

$x=2$

$x=-4$

$D_g = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$

۳, $h(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

$x^2-4=0 \rightarrow (x-2)(x+2)=0$

✓

↓

$x=2$

$x=-2$

$D_h = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

۳

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

* محدودیت :
مقدار ترتیب شدن تابع f به مقدار عددی L
کاملاً است x را به a نزدیک کنیم.

$$1, \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3x = (1)^2 + 3(1) = 4 \quad \checkmark$$

مثال ۱ حد بگیرد.

$$2, \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+5} = \sqrt{3+5} = \sqrt{8} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$x \rightarrow a^+ \rightarrow \boxed{x > a}$$

تعریف حد راست :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

$$x \rightarrow a^- \rightarrow \boxed{x < a}$$

تعریف حد چپ :

تابع زمانی حد دارد، حد راست مساوی حد چپ باشد.

$$L_1 = L_2$$

۴

مثال ۱: آیا تابع زیر در نقطه $x=1$ محدود است؟ حد دارد؟ حد ندارد؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 5 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = \boxed{2}$$

$x \rightarrow 1^+ \rightarrow x > 1$ حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - 5 = 2(1) - 5 = \boxed{-3}$$

$x \rightarrow 1^- \rightarrow x < 1$ حد ندارد

چون $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ پس حد ندارد.

مثال ۲: اگر a و b را تعیین کنید تا تابع زیر در نقطه $x=2$ محدود باشد، برابر ۴ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x \leq 2 \\ x + b & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = a(2) - 1 = \boxed{2a - 1}$$

حد دارد: $\boxed{a=4}$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x + b = \boxed{2 + b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 4 \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = 2.5 \\ 2 + b = 4 \rightarrow \boxed{b=2} \end{cases} \checkmark$$

* محاسبه حد هائی بصورت $\left(\frac{0}{0}\right)$ هستند :

برای رفع ابهام این توابع از اتحادها استفاده میکنیم و عامل $x-a$ را حذف میکنیم.

مثال (حد بگیرد)

$$1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 2+2 = \boxed{4} \quad \checkmark$$

$$2, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} = \frac{4 - 4}{4^2 - 16} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(x+4)} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8} \quad \checkmark$$

$$3, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x+3)} = \frac{1}{-1+3} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

7

* مشتق *

مشتق

$$1, f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$$

$$0.5) f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$$

$$2, f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$$

$$1) f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$3, f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$2) f(x) = x^r \rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

$$4, f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

$$0.5) f(x) = 1x^4 + 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x - 4$$

$$5, f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x) \cdot g(x)$$

$$0.5) f(x) = (x^2 + 3x)(2x - 1)$$

$$f'(x) = (2x + 3)(2x - 1) + 2(x^2 + 3x)$$

$$6, f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$$

$$\checkmark \quad \text{مثال ٥) } f(x) = \frac{2x^r - 1}{rx^r} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot 2x^r (rx^r) - (rx^r)(2x^r - 1)}{(rx^r)^2}$$

$$٧, y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{r\sqrt{u}}$$

$$\text{مثال ٦) } f(x) = \sqrt{rx^r} \rightarrow f'(x) = \frac{r \cdot 1 \cdot x^r}{r\sqrt{rx^r}}$$

$$٨, y = \sqrt[m]{u^n} \rightarrow y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}} \rightarrow \text{مثال ٧) } f(x) = \sqrt{(x^r + 1)^r}$$

$$f'(x) = \frac{r(x^r + 1)^{r-1} \cdot rx^{r-1}}{r\sqrt{(x^r + 1)^r}}$$

$$٩, y = u^n \rightarrow y' = nu' u^{n-1}$$

$$\text{مثال ٨) } f(x) = (x^r - 2x^r)^{10} \rightarrow$$

$$f'(x) = 10 \cdot (rx^r - 10x^r) (x^r - 2x^r)^9$$

$$١, y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

مشتقات متتالية

$$\text{مثال ٩) } f(x) = \sin(x^r - 1) \rightarrow f'(x) = rx^r \cos(x^r - 1)$$

$$1, y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$\text{مثال} \quad y = \cos (x^2 + 1) \rightarrow y' = -(2x) \sin (x^2 + 1)$$

$$2, y = \tan u \rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u)$$

$$\text{مثال} \quad f(x) = \tan (x^2) \rightarrow f'(x) = (2x) (1 + \tan^2 (x^2))$$

$$3, y = \cot u \rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u)$$

$$\text{مثال} \quad y = \cot (\sqrt{x}) \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \cot^2 (\sqrt{x}))$$

مشتقات توابع غاصی و لغاصی طبیعی

$$1, f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$2, y = e^u \rightarrow y' = u' e^u$$

$$3, y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$4, y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

9

$$\text{٥٤٥) } f(x) = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$f'(x) = e^x (\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x) e^x$$

$$\text{٥٤٦) } f(x) = e^{x^r + vx} \rightarrow f'(x) = (rx + v) e^{x^r + vx}$$

$$\text{٥٤٧) } f(x) = \ln x + e^x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

$$\text{٥٤٨) } f(x) = \ln(x^r - rx^r) \rightarrow f'(x) = \frac{rx^r - rx^r}{x^r - rx^r}$$

✓
 (جذب مثل مکتب) $\rightarrow$ مکتب

$$1, f(x) = \sin(e^x + \ln x)$$

$$f'(x) = (e^x + \frac{1}{x}) \cos(e^x + \ln x)$$

$$2, f(x) = e^{(\ln x + rx)} \rightarrow f'(x) = (\frac{1}{x} + r) e^{(\ln x + rx)}$$

$$3, f(x) = \cos(e^x) \rightarrow f'(x) = -(e^x) \sin(e^x)$$

۱۰

* انتگرال *

$$۱, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

منتهی به هم :

$$۱, \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$۱, \int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + C$$

$$۲, \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$۱, \int x^3 - 2x^2 + 5x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$$

$$۱, \int vx^r + rx dx = \frac{vx^{r+1}}{r+1} + \frac{rx^{r+1}}{r+1} + C$$

$$۳, \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$۴, \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$۵, \int 1 + \tan^2 x dx = \tan x + C$$

$$۶, \int 1 + \cot^2 x dx = -\cot x + C$$

۱۱ / $\int a \sin x - b \cos x dx = a(-\cos x) - b(\sin x) + C$ (مثال)

(مثال) $\int f + f \tan^2 x dx = \int f(1 + \tan^2 x) dx = f \tan x + C$

الگوهای مشتقات، کسری، عبارات، جبری

۱، $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

(مثال) $\int x^2 (x^3 + 1)^5 dx$ مثال انتگرال گیری

جواب : $x^3 + 1 = u \rightarrow 3x^2 dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

$$\int \cancel{x^2} \cdot u^5 \cdot \frac{du}{\cancel{3x^2}} = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 1)^6}{6} + C$$

12 /

$$r, \int e^u du = e^u + C \quad (\text{مربع})$$

$$d) \int x^r e^{(x^2-1)} dx$$

انتقال بکبره

$$x^2 - 1 = u \rightarrow 2x^r dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{2x^r}$$

$$\int \cancel{x^r} \cdot e^u \cdot \frac{du}{\cancel{2x^r}} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2-1} + C \quad \checkmark$$

$$r, \int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (\text{مربع})$$

$$d) \int \frac{rx+1}{x^r+x} dx$$

انتقال بکبره

$$x^r+x=u \rightarrow (rx+1) dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{rx+1}$$

$$\int \frac{\cancel{rx+1}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{rx+1}} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x^r+x) + C$$

مربع

مربع