

بردارها

فاصله در فضا از هم (طول یا عرض)

$$P(x_1, y_1, z_1)$$

$$Q(x_2, y_2, z_2)$$

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

تعریف: هر بردار جهت دار را بردار می‌گویند

اگر $a = (a_1, a_2, a_3)$ بردار باشد اندازه بردار برابر است با

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

هر بردار را می‌توان به صورت ترکیب بردارهای i, j, k نوشت

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

جهت بردار a برابر است با

$$e_a = \frac{a}{|a|}$$

نقطه قائم بردار a در جهت بردار b برابر است با

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

نکته:

مثال ۱: بردارهای $a = -i + 2j + 3k$ و $b = (4, -2, 2)$ مفروض اند.

الف) e_a

ب) تصویر بردار a در امتداد b (ع. تصویر بردار b در امتداد $a+b$ را محاسبه کنید).

جواب:

$$\text{الف)} \quad e_a = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{1+4+9}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$e_a = \frac{a}{|a|}$$

$$\text{ب)} \quad a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b \Rightarrow a' = \frac{-2}{(\sqrt{24})^2} \cdot (4, -2, 2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$a \cdot b = (-1) \times 4 + 2 \times (-2) + 3 \times 2 = -4 - 4 + 6 = -2$$

$$|b| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$$

$$\text{ج)} \quad b' = \frac{b \cdot (a+b)}{|a+b|^2} \cdot (a+b)$$

$$b = (4, -2, 2)$$

$$a+b = (-1+4, 2-2, 3+2) = (3, 0, 5)$$

$$b \cdot (a+b) = 4 \times 3 + (-2) \times 0 + 2 \times 5 = 12 + 0 + 10 = 22$$

$$|a+b| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow b' = \frac{22}{(\sqrt{34})^2} \cdot (3, 0, 5) = \left(\frac{11}{\sqrt{34}}, 0, \frac{5}{\sqrt{34}} \right)$$

ضرب داخلی دو بردار: a و b دو بردار و θ زاویه بین آنها

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta$$

ضرب خارجی دو بردار: a و b دو بردار و θ زاویه بین آنها

$$a \times b = |a||b|\sin\theta$$

نکته: ضرب خارجی دو بردار برای است با

$$a \times b = \begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - b_1a_3) + k(a_1b_2 - b_2a_1)$$

نکته: مساحت متوازی الاضلاع که توسط دو بردار ساخته می شود برای اندازه ضرب خارجی آن دو بردار

$$S = |a \times b|$$

معادلات خط و صفحه در فضا

معادله خط: هر خط در فضا از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و بردار موازی با خط به نام $u(p, q, r)$ مشخص می شود:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}$$

معادله پاره بندی خط برای است با

معادله متعارف خط:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

مثال: معادله پاره بندی و متعارف خطی که از نقطه $P_0 = (2, -4, 1)$ می گذرد و موازی با بردار $(1, -2, -1)$ می باشد است، بیابید

$$x, y, z, \\ P_0(2, -4, 1)$$

$$U(3, -2, -1)$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \leftarrow \text{پارامتر}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{-1}$$

مثال: معادله خطی بنویسید که از نقطه $P(-1, -2, 3)$ بگذرد و موازی خط $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ موازی باشد.

جواب: ابتدا آنرا در معادله خط متغیرهای x, y, z معنی بردار از معنی فاکتور گرفته و به فرج انتقال دهیم

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-4}$$

$$U(-1, 3, -4)$$

$$P(-1, -2, 3)$$

$$\rightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

فاصله نقطه از خط:

فرم کنیم L خط باشد که P در U موازی است و P نقطه ای خارج از L قرار دارد در این صورت فاصله P از L

معین D ، برابر است با

$$D = \frac{|U \times P.P|}{|U|}$$

نکته: اگر معادله خط L در برابر P هر دو x, y, z است را قرار می دهیم.

مثال: فاصله نقطه $P(5, -2, 2)$ از خط L باشد که از $P_0(1, -1, 2)$ بگذرد.

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+4t \\ z=2-2t \end{cases}$$

$$U(0, 4, -2) \rightarrow \text{مختصات در معادله}$$

جواب: نقطه $P_0(1, -1, 2)$ از خط داده شده بدست می آوریم حول P_0 و اندازه بردار P_0P را بدست می آوریم

$$\vec{P_0P} = (5-1, -4+1, 2-2) = (4, -3, 0)$$

$$U \times P_0P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = i(0 - (-8)) - j(0 - (-8)) + k(0 - 16) = 8i - 8j - 16k$$

$$|U \times P_0P| = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + (-16)^2} = \sqrt{320}$$

$$D = \frac{\sqrt{725}}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

معادله صفحه در فضا

یک صفحه در فضا با معادله $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و برداری عمود بر صفحه $\vec{n}(a, b, c)$ مشخص می شود و معادله آن

صورت زیر است.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

مثال - معادله صفحه را بنویسید که از نقطه $P_0(-1, 2, 3)$ بگذرد و عمود بر بردار $\vec{n}(4, -1, 2)$ باشد.

$$4(x + 1) + (-1)(y - 2) + 2(z - 3) = 0 \rightarrow 4x + 4 - y + 2 + 2z - 6 = 0$$

$$\rightarrow 4x - y + 2z = 0$$

مثال : معادله صفحه را بنویسید که از سه نقطه $A(2, 4, 3)$ ، $B(5, 3, 2)$ ، $C(2, -1, 4)$ بگذرد.

$$\vec{AB} = (3, -1, 2)$$

$$\vec{AC} = (0, -5, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = i((-1) \times 1 - 2 \times (-5)) - j(3 \times 1 - 0 \times 2) + k(3 \times (-5) - 0 \times (-1))$$

$$= -9i - 3j - 15k$$

$$\vec{n} = (-9, -3, -15)$$

$$A = (2, 4, 3)$$

$$\rightarrow -9(x - 2) - 3(y - 4) - 15(z - 3) = 0$$

$$\rightarrow -9x + 18 - 3y + 12 - 15z + 45 = 0$$

$$\rightarrow -9x - 3y - 15z = -75$$

توابع پتانسیل: تابعی از R^n به R است که R در حقیقت است در این توابع دو متغیر، سه متغیر و ... را می توانیم بنویسیم.
 $z = P(x, y)$ و $w = P(x, y, z)$ است.

مثال: مشتق جزئی توابع پتانسیل: مشتق نسبت به x را بصورت $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}$ (یا P_x) می نویسند. بصورت $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$ و $P_z = \frac{\partial P}{\partial z}$ نشان می دهیم.

مثال: مشتق جزئی تابع $P(x, y) = 3x^2y - 4xy + x^3$ را بصورت P_x و P_y بنویسید.

برای گرفتن مشتق نسبت به x ، y را بصورت ثابت می ماند.

$$P_x = 6xy - 4y + 3x^2 \rightarrow$$

$$P_y = 3x^2 - 4x$$

مثال: $P(x, y, z) = 4x^3 + e^x y - \ln x y z$ مشتق جزئی نسبت به x و y بنویسید.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2 + e^x y - \frac{yz}{xy}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x - \frac{xz}{xy}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{xy}{xyz}$$

مثال: $P(x, y, z) = \sin x^2 y - 3 \ln x^2 y + z^4$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy \cos x^2 y - 3 \frac{2xy}{x^2 y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4z^3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x^2 y - 3 \frac{x^2}{x^2 y}$$

مشتق مرتبه بالاتر را بصورت $P_{xx}, P_{xy}, P_{yy}, P_{yx}, P_{yz}, P_{zy}$ نشان می دهیم.

مثال: مشتقات مرتبه بالاتر توابع زیر را بنویسید.

الف) $P(x, y) = -3x^2y + xy^3 + y^2$

$$P_x = -6xy + y^3 \rightarrow P_{xx} = -6y$$

از مشتق اول باید مشتق گرفته شود (نسبت به x)

$$P_y = -3x^2 + 3xy^2 + 2y \rightarrow P_{yy} = 6xy + 2$$

$$P_{xy} = -6x + 6y^2 \rightarrow P_{yx} = -6x + 6y^2$$

$$P_{yz} = -6x + 6y^2 \rightarrow P_{zy} = -6x + 6y^2$$

$$b) f(x, y) = x^4 y^3 - x^4 + y^2 - 2xy$$

$$F_x = 4x^3 y^3 - 4x^3 - 2y \rightarrow F_{xx} = 12x^2 y^3 - 2y$$

$$F_y = 3x^4 y^2 + 2y - 2x \rightarrow F_{yy} = 6x^4 y + 2$$

$$F_{xy} = 12x^3 y^2 - 2, \quad F_{yx} = 12x^3 y^2 - 2$$

فرض کنیم: استریم‌های فرضی را بصورت

نویس در فرمول‌های زیر قرار دهیم

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{فرض کنیم} \quad F_x, F_y, F_z \quad \text{نویس}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z}$$

مثال: فرض کنیم بیابان

$$a) x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow x^2 + z^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow F_x = 2x \quad F_y = 2y \quad F_z = 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{2x}{2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z} = - \frac{2y}{2z}$$

$$b) xy + y \ln z = x^2 + 2y^2 \rightarrow xy + y \ln z - x^2 - 2y^2 = 0$$

$$F_x = y - 2x$$

$$F_y = x + \ln z - 4y$$

$$F_z = y \times \frac{1}{z} = \frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{y - 2x}{\frac{y}{z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{x + \ln z - 4y}{\frac{y}{z}}$$

$$c) x^4 z - 2yx = z^2 - 2x^2 + y^2 x^4 \rightarrow x^4 z - 2yx - z^2 + 2x^2 - y^2 x^4 = 0$$

$$F_x = 4x^3 z - 2y + 4x - 4x^3 y^2$$

$$F_y = -2x - 4y^2 x^3$$

$$F_z = x^4 - 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{4x^3 z - 2y + 4x - 4x^3 y^2}{x^4 - 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{-2x - 4y^2 x^3}{x^4 - 2z}$$

گزاران: مشتقات ضربه بردار در نقطه (x_0, y_0, z_0) را گزارش کن تا به جواب منتهی می شود

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

مثال: $f(x, y, z) = x^2 y + y x z - z^2$ مفروض است. مطلوب است هالسیه گزاران f

$$\nabla f = (y^2 + y, x^2 + x, -2z)$$

مثال: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ مطلوب است هالسیه گزاران

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

مشتق سویی

گزار f تا به چه ضربه تغییر و u برداری که به نظر می آید مشتق سویی f در جهت u صورت زیر بدست می آید

$$D_u f = \nabla f \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

مثال: مشتق سویی $f(x, y, z) = x^2 y - y^2 z + 2z^2$ در نقطه $P(1, -2, -1)$ سویی بردار $u(2, -3, 2)$ بدست آورید.

$$\nabla f = (2x, -2y, 2z) \xrightarrow{(2, -3, 2)} \nabla f|_P = (2, 4, -2)$$

$$|u| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$D_u f = (2, 4, -2) \cdot \frac{(2, -3, 2)}{\sqrt{17}} = \left(\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{12}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \right) = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

مثال: مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = x^3 + y^2 - z^2$ در نقطه $P(2, 3, -1)$ سویی بردار $u(1, -2, 4)$ بدست آورید.

$$\nabla f = (3x^2, 2y, -2z) \xrightarrow{(1, -2, 4)} \nabla f|_P = (12, 6, 2)$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$D_u f = (12, 6, 2) \cdot \frac{(1, -2, 4)}{\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{21}} - \frac{12}{\sqrt{21}} + \frac{8}{\sqrt{21}} = \frac{8}{\sqrt{21}}$$

ماتریس وینیم توابع ضربه متغیر (السترم)

(۱) دستگاه
$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0) = 0 \\ F_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$
 اصل مینیم (x_0, y_0) جواب دستگاه است

(۲) معیار
$$\Delta(x, y) = F_{xx} \cdot F_{yy} - (F_{xy})^2$$
 (درست می‌آورد)

(۳) اگر $\Delta(x, y) > 0$ و $F_{xx}(x_0, y_0) < 0$ $\rightarrow$ Max

(۴) اگر $\Delta(x, y) > 0$ و $F_{xx}(x_0, y_0) > 0$ $\rightarrow$ Min

(۵) اگر $\Delta(x, y) < 0$ اکسترم ندارد. این نقطه نقطه زینی است.

مثال: الاسترم با نقطه زینی توابع زیر را معین کنید.

الف) $F(x, y) = 2xy - 2y^2 + 4x - 2x^2 + 4y - 4$

$$\begin{cases} F_x = 2y - 4x + 4 = 0 \\ F_y = 2x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -4 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -4 \\ 4x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$\frac{-12}{-12} \rightarrow y = \frac{2}{4} \quad / \quad x = \frac{4}{4}$$

$F_{xx} = -4 \quad F_{yy} = -4 \quad F_{xy} = 2$

$\Delta\left(\frac{4}{4}, \frac{2}{4}\right) = (-4)(-4) - 2^2 = +16 - 4 = 12 > 0$ و $F_{xx} = -4 < 0$

نقطه ماتریس (Max) داریم که همان $\left(\frac{4}{4}, \frac{2}{4}\right)$ است

ب) $F(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^2 - 4y$

$F_{xx} = 2 \quad F_{yy} = \frac{1}{2} \quad F_{xy} = -2$

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2y = 0 \rightarrow x = y \\ F_y = -2x + \frac{1}{2}y - 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=y} y^2 - 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2, -1 \quad / \quad (3, 3) \quad (-1, -1)$$

$\Delta(x, y) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - (-2)^2 = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow$ زینی $\rightarrow \Delta(-1, -1) = -3 - 4 = -7 < 0$

$\Delta(3, 3) = +4 - 4 = 0$ $F_{xx} = 2 > 0 \rightarrow$ مینیم (Min)

در نقطه $(3, 3)$ Min، $(-1, -1)$ زینی

انتگرالهای دوگانه:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$$

مثال:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

الف)
$$\underbrace{\int_0^\pi \int_0^\pi (\sin x + \cos y) dy dx}_I = \int_0^\pi \pi \sin x dx = -\pi \cos x \Big|_0^\pi = -\pi(-1-1) = 2\pi$$

$$I = \int_0^\pi (\sin x + \cos y) dy = y \sin x + \sin y \Big|_0^\pi = (\pi \sin x + \sin \pi) - (0 + \sin 0) = \pi \sin x \rightarrow$$
 جایگزین در فرمول بالا (صورت سوال)

ب)
$$\underbrace{\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos y dy dx}_I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos y dy = x^2 \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = x^2 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - x^2 \sin 0 = x^2$$
 جایگزین در فرمول بالا

ج)
$$\underbrace{\int_0^1 \int_1^2 (xy + 1) dx dy}_I = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + y \right) dy = \frac{xy^3}{6} + y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$$

$$I = \int_1^2 (xy + 1) dx = \frac{x^2}{2} y + x \Big|_1^2 = \left(\frac{4}{2} y + 2 \right) - \left(\frac{1}{2} y + 1 \right) = 2y + 2 - \frac{y}{2} - 1 = \frac{3y}{2} + 1 \rightarrow$$
 جایگزین

تعریف: انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ را در صورت وجود تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامند و به صورت

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

نمایش می‌کنند.

چند مورد خاص لاپلاس

۱) $f(t) = a$ ^{عدد ثابت} $\rightarrow F(s) = \frac{a}{s}$

۲) $f(t) = t^n \rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

۳) $f(t) = \sin at \rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

۴) $f(t) = \cos at \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$

۵) $f(t) = e^{-at} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a}$

مثال: لاپلاس توابع زیر را بدست آورید!

الف) $f(t) = t \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$

ب) $f(t) = t^2 \rightarrow F(s) = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$

ج) $f(t) = \sin^2 t \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$

د) $f(t) = \cos^2 t \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$

ه) $f(t) = e^{at} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$

مثال: لاپلاس بدست آورید!

الف) $f(t) = t^3 - 2t^2 + t - a \rightarrow F(s) = \frac{3!}{s^4} - 2 \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{a}{s}$

ب) $f(t) = \cos t + 2 \sin 4t - e^{-4t} \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + 2 \frac{4}{s^2 + 16} - \frac{1}{s+4}$

معادلات دیفرانسیل

تعریف: هر معادله که شامل یک تابع مجهول و مشتق‌های آن باشد یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

معادلات دیفرانسیل جداشدنی:

هرگاه معادله دیفرانسیلی را بصورت $P(x)dx = g(y)dy$ نوشته و از طرفین بتوان انتگرال گرفت معادله را جداشدنی کرده ایم پس

$$\int P(x)dx = \int g(y)dy \quad \text{جواب این معادله است.}$$

مثال: معادله‌های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(نکته: $y' = \frac{dy}{dx}$ تبدیل می‌کنیم)

الف) $y' = \frac{x^2+1}{-y+5}$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{-y+5} \rightarrow (-y+5)dy = (x^2+1)dx \rightarrow \int (-y+5)dy = \int (x^2+1)dx$$

$$\rightarrow -\frac{y^2}{2} + 5y = \frac{x^3}{3} + x + C$$

ب) $(1+x^2)dy - x^2y dx = 0 \rightarrow (1+x^2)dy = \frac{x^2y}{1+x^2} dx$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

ج) $dx + xy dy = y^2 dx + y dy \rightarrow dx - y^2 dx = y dy - xy dy \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}$

$$\rightarrow (1-y^2)dx = y(1-x)dy \rightarrow -\int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{-y dy}{1-y^2} \rightarrow \ln|1-x| = -\frac{1}{2} \ln|1-y^2|$$

$$\rightarrow -\ln|1-x| + C = -\frac{1}{2} \ln|1-y^2|$$