

ایستاد 1،

مرکز ثقل:

هر جایی که مرکز ثقل باشد مرکز ثقل وجود دارد.



جسم
↓
پراکنش نیروهای جاذبه

$$w + w = mg$$

m/s^2

kg

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

مجموعه مرکز ثقل x

$$x_w = \frac{\sum w_i \bar{x}_i}{\sum w_i}$$

مجموعه مرکز ثقل y

$$y_w = \frac{\sum w_i \bar{y}_i}{\sum w_i}$$

مرکز ثقل زمانی وجود دارد. نه اجسام در محدوده گرانش باشد. مثل: کره زمین

$$\rho = \frac{m}{V}$$

چگالی ← ρ

$$m = \rho \cdot V$$

حجم (ثابت) → V

مرکز جرم:

چگالی: جرم واحد حجم (یعنی توی یک واحد حجم) چقدر جرم داریم.

$$\rho = 7.8$$

چگالی واحد جرم

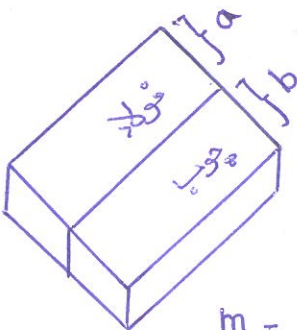
چگالی در cm³ حجم آهن

$$\bar{x}_m = \frac{\sum m_i \cdot \bar{x}_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{y}_m = \frac{\sum m_i \cdot \bar{y}_i}{\sum m_i}$$

وی بار

مختصات در مختصات مرکز ثقل و مرکز جرم دارند.



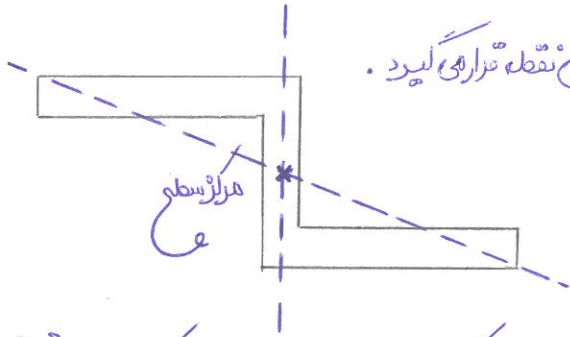
$$m = \rho \cdot V$$

یک صفحه در نظر بگیرید. که یک سمت آن چوب و یک سمت فولاد. پانویس به اینکه فولاد نسبت به چوب چگالی بیشتری دارد. بنابراین مرکز جرم در مرکز فولاد قرار دارد. چگالی وی جرم فولاد بیشتره پس به سمت فولاد.

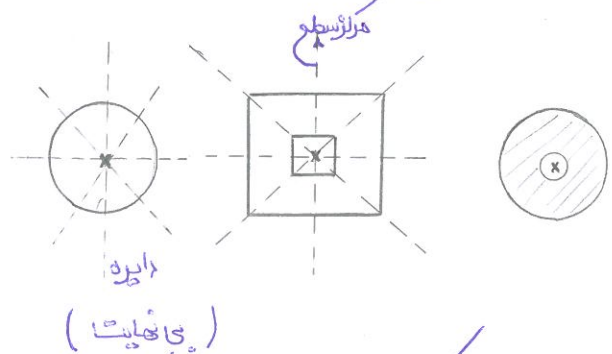
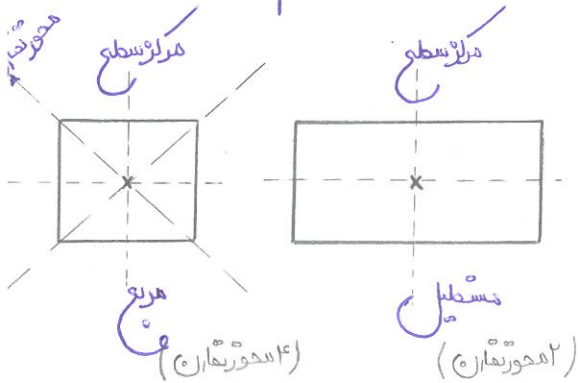
مرکز سطح: نقطه‌ای که شکل هندسی بیسیک دارد.

در شکل میل مرکز سطح هیچ ربطی به جنس ماده تشکیل دهنده و ماده چگالی ندارد و دقیقاً در وسط مستطیل قرار دارد.

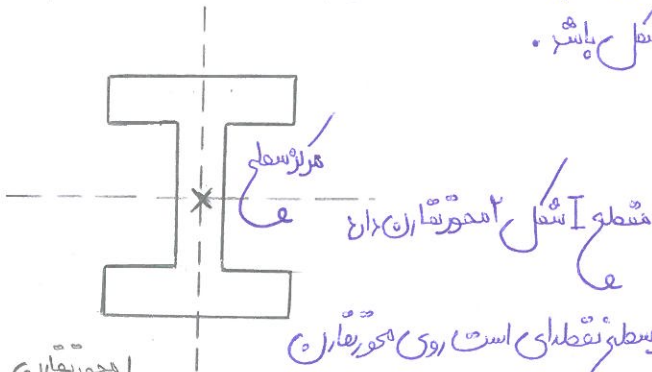
اگر شکلی نسبت به یک نقطه متقارن باشد، مرکز سطح آن دقیقاً در آن نقطه قرار می‌گیرد.



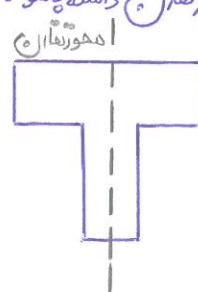
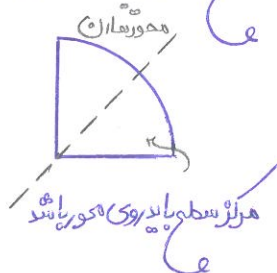
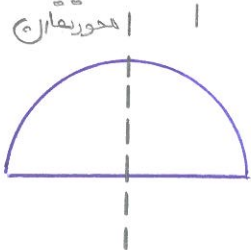
* اگر شکلی دارای دو محور تقارن به بالا باشد، مرکز سطح آن محل تلاقی محورهای تقارن می‌باشد.

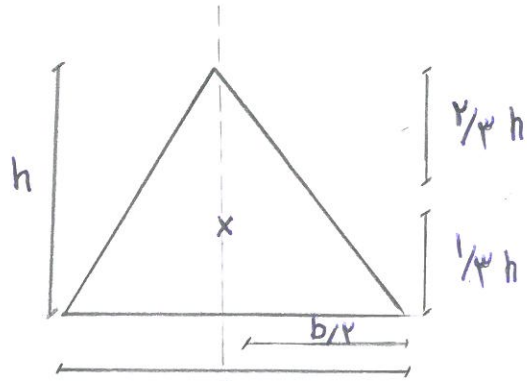
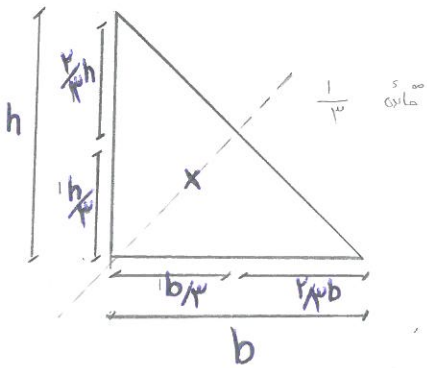
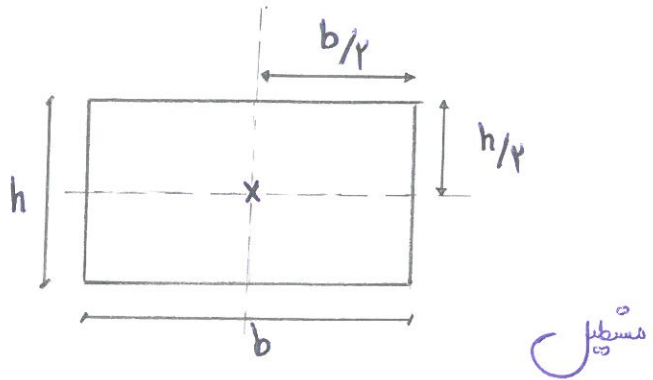
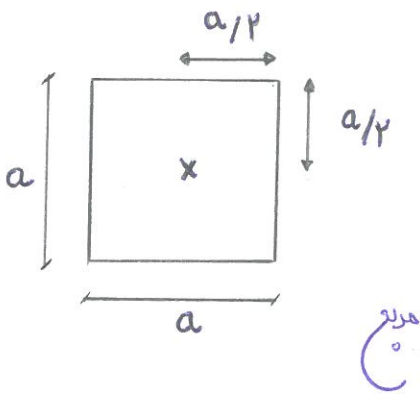


نکته: بنا بر این مرکز سطح می‌تواند جایی خارج از شکل باشد.

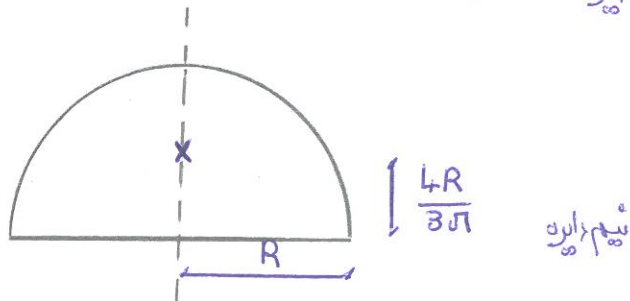
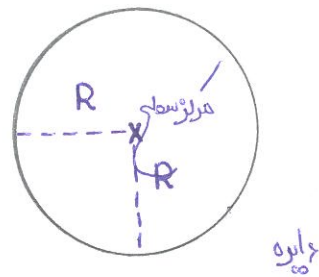
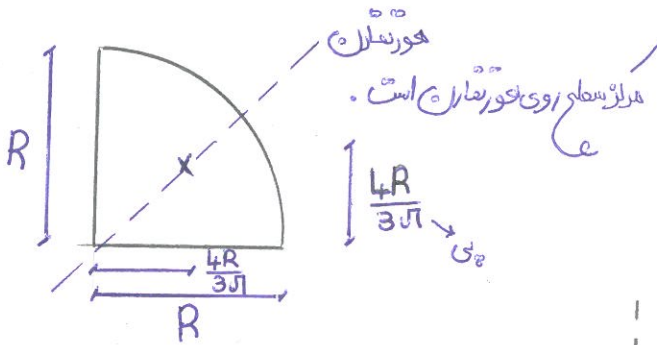


* اگر شکلی فقط یک محور تقارن داشته باشد، مرکز سطح نقطه‌ای است روی محور تقارن.





مساحت مثلث متساوی الساقین



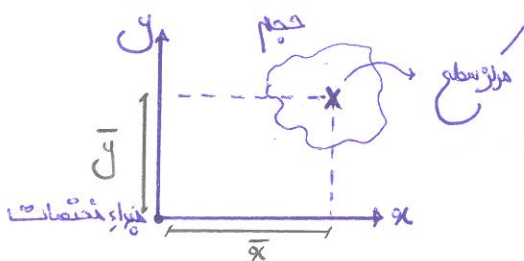
مساحت مربع ← یک ضلع x خودش
 مساحت مستطیل ← طول x عرض
 مساحت مثلث ← (معمده x ارتفاع) $\div 2$

برای به دست آوردن مرکز سطح شکلی نه ترکیبی از شکل های قبل نه گفتیم باشد. از این روش استفاده می کنیم.

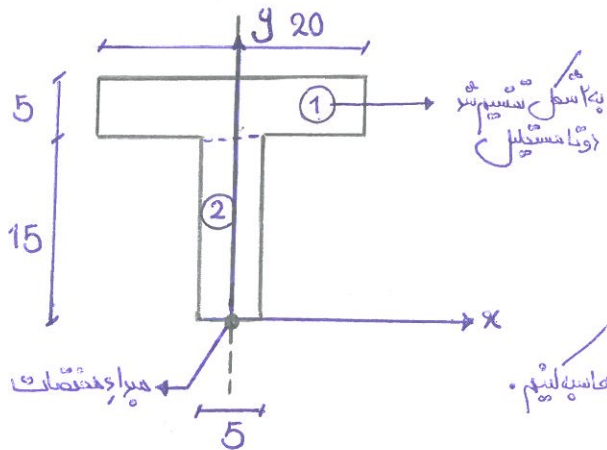
$$\bar{x}_A = \frac{\sum A_i \cdot \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y}_A = \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

الگوریتمی را در نظر بگیریم مرکز سطح آن نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ باشد. نکته
 $\bar{x}$ یعنی ← فاصله مرکز سطح تا محور y به موازات محور x
 $\bar{y}$ یعنی ← فاصله مرکز سطح تا محور x به موازات محور y



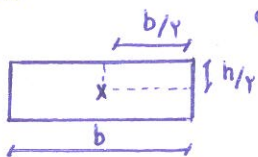
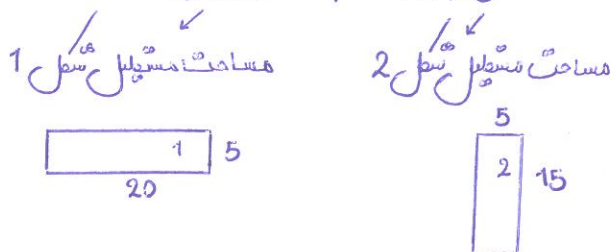
مثال: مرکز سطح شکل زیر را به دست آوریم.



پانوجه به اینکه شکل ما یک هور تعادل دارد.
 یکی از محور ها شلای محور را همیشه بر هور تعادل می گیریم.
 در این صورت $\bar{x}$ مساوی با صفر است. و فقط $\bar{y}$ را باید محاسبه کنیم.

$$\bar{x} = 0$$

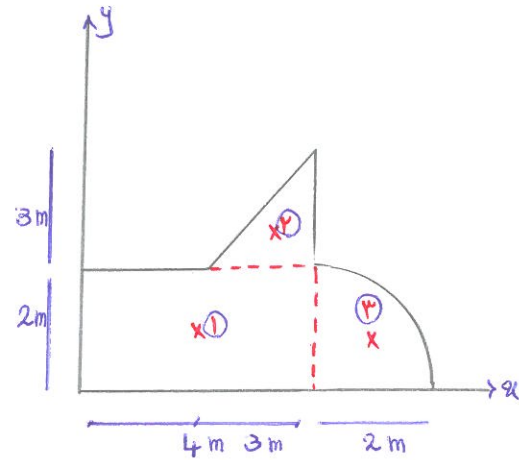
$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{5 \times 20 \times (15 + 2.5) + 15 \times 5 \times 7.5}{5 \times 20 + 15 \times 5}$$



مستطیل

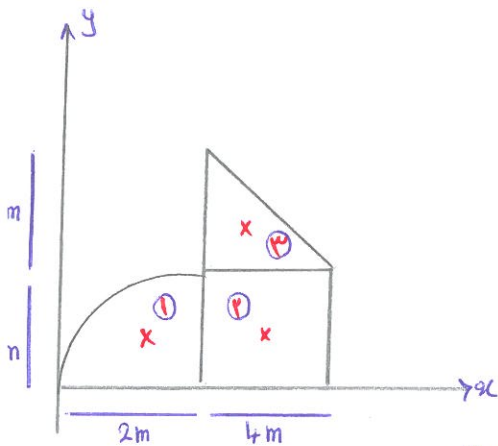
مثال: مرکز سطح شکل زیر را بیست آورید.

مساحت مستطیل: طول $\times$ عرض
مساحت مثلث: $\frac{1}{2} \times$ قاعده $\times$ ارتفاع $\div 2$
مساحت ربع دایره: $\frac{\pi R^2}{4}$



$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{x}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{2 \times 7 \times \left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times (6) + \frac{\pi \times 2^2}{4} \times 7 + \frac{4R}{3\pi}}{2 \times 7 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \pi} =$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{2 \times 7 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times (3) + \pi \times \frac{4 \times 2}{3\pi}}{2 \times 7 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \pi} =$$

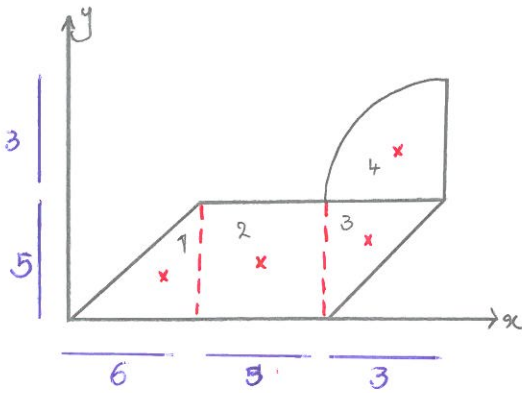


مثال: مرکز سطح شکل زیر را بیست آورید.

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{x}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{\frac{\pi \times 2^2}{4} \left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 4 \times 2 \times \left(2 + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \left(2 + \frac{4}{3}\right)}{\frac{\pi \times 2^2}{4} + 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3} =$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{\frac{\pi \times 2^2}{4} \left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 4 \times 2 \times \left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \left(2 + \frac{4}{3}\right)}{\frac{\pi \times 2^2}{4} + 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3} =$$

مثال مرکز سطح شکل را بیابید.



شماره 4

شماره 3

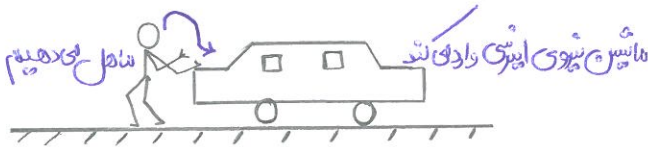
شماره 2

شماره 1

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \left(\frac{2}{3} \times 6\right) + 5 \times 5 \times \left(6 + \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 5\right) (11+1) + \frac{\pi \times 3^2}{4} \times \left(11 + \left(3 \times \frac{4R}{3\pi}\right)\right)}{\frac{1}{2} \times 6 \times 5 + 5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 + \frac{\pi \times 3^2}{4}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \left(\frac{1}{3} \times 5\right) + 5 \times 5 \times (2.5) + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{1}{3} \times 5 + \frac{\pi \times 3^2}{4} \times \left(5 + \frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{1}{2} \times 6 \times 5 + 5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 + \frac{\pi \times 3^2}{4}}$$

ایزنی: ایزنی به زبان ساده یعنی تئوری، یعنی اینکه یک جسم مثالی داشته باشد. حالت اولیه خود را حفظ کند.



مکان ایزنی (گسار هم سطح): عاملی که سبب می شود یک جسم در مقابل خمش یا دوران یا چرخش تفاوت کند. تا موقعیت اولیه خود را حفظ کند.

هرچه قدر مکان ایزنی بیشتر باشد، تفاوت جسم در مقابل خم شدن بیشتر است.

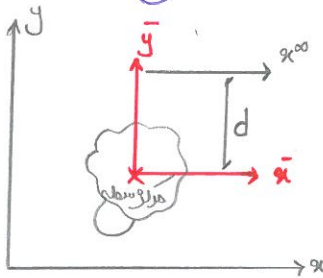
مکان ایزنی حول محور $x \rightarrow I_x$

مکان ایزنی حول محور $y \rightarrow I_y$

مکان ایزنی حول محور $x^* \rightarrow I_{x^*}$

* مکان ایزنی حول یک محور خاص می شود.

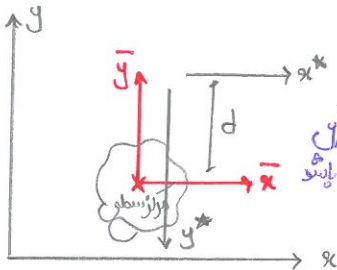
نکته: هر چه این محور به مرکز سطح نزدیک باشد، همان اینرسی کمتر است. و هر چه این محور به مرکز سطح دورتر باشد، همان اینرسی بیشتر می شود.



- قضیه محورها موازی در (همان اینرسی)

$$I_{x^*} = I_{\bar{x}} + Ad^2$$

فاصله ۲ محورهای x^* و $\bar{x}$ از دهم $\rightarrow$ مساحت جیبی نه می خوانیم
همان اینرسی آن را حساب کنیم
همان اینرسی حول محور x^* نیاز داریم سطح می گذرد.
همان اینرسی حول محور $\bar{x}$ همان اینرسی حول محور x^* نه الزاماً با محور x^* موازی می باشد.



$$I_{y^*} = I_{\bar{y}} + Ad^2$$

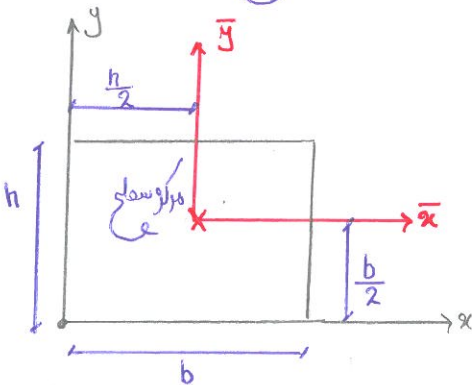
فاصله ۲ محورهای y^* و $\bar{y}$ از دهم $\rightarrow$ مساحت جیبی نه می خوانیم
همان اینرسی آن را حساب کنیم
همان اینرسی حول محور y^* نیاز داریم سطح می گذرد.
همان اینرسی حول محور $\bar{y}$ همان اینرسی حول محور y^* نه الزاماً با محور y^* موازی می باشد.

نکته:

- محور x^* محوری است که از مرکز سطح به شوارات محور x عمود می کند.
- محور y^* محوری است که از مرکز سطح به شوارات محور y عمود می کند.

مساحت اینرسی مستطیل:

همان اینرسی حول محوری که از مرکز سطح می گذرد $\frac{1}{12}$
همان اینرسی حول محوری که از مرکز سطح و سطحین پر صلع است $\frac{1}{3}$



$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{12} bh^3 \quad * \quad I_{\bar{y}} = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$I_x = \frac{1}{3} \times b \times h^3 \quad * \quad I_y = \frac{1}{3} \times b^3 \times h$$

اثبات I_x به کمک قضیه محورها موازی

$$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2 = \frac{1}{12} bh^3 + (b \times h) \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3$$

در رابطه بالا ضلعی به توان ۳ می آید. نه توسط محوری که محل آن همان اینرسی گرفته می شود. باز او به قطع شود.

ممان اینرسی مثلث ← ممان اینرسی حول محوری که از مرکز سطح می گذرد. ← $\frac{1}{36}$

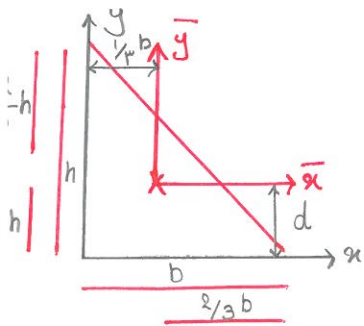
$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{36} b \times h^3$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{1}{36} b^3 \times h$$

ممان اینرسی حول محوری که منطبق بر ضلع است. ← $\frac{1}{12}$

$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{12} b \times h^3$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{1}{12} b^3 \times h$$



اثبات از قضیه هم‌محی موازی :

$$I_x = I_{\bar{x}} + A d^2 = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{1}{2} \times b \times h \times \left(\frac{1}{3} h\right)^2 = \frac{1}{12} b h^3$$

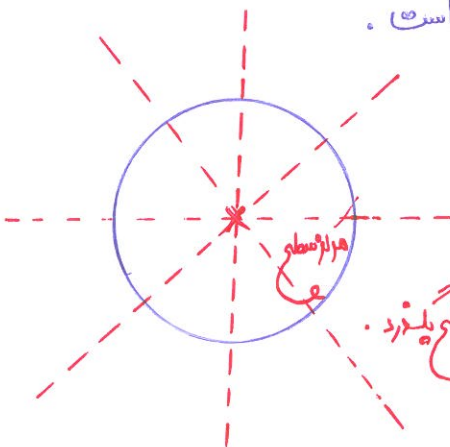
ممان اینرسی دایره :

حول هر محوری که از مرکز سطح آن عبور کند. برابر $\frac{\pi R^4}{4}$ است.

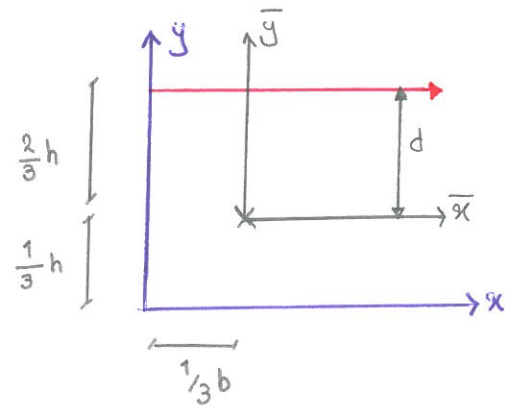
نه شعاع دایره است.

$$I = \frac{\pi R^4}{4}$$

حول هر محوری که از مرکز سطح می گذرد.



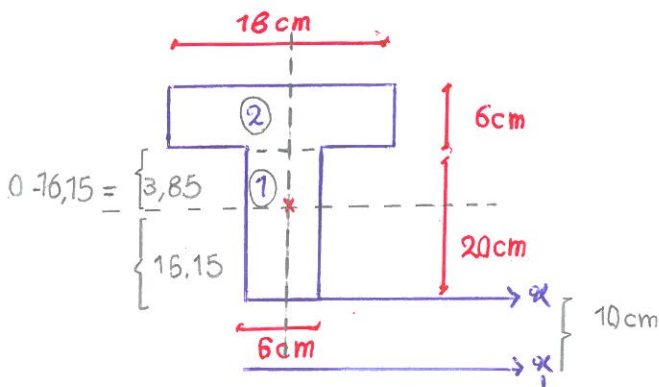
مسئله: محاسبه اینرسی شکل زیر را حول T مرکز ثقل



$$I_T = I_{\bar{x}} + Ad^2$$

$$I_T = \frac{1}{36} \times b \times h^3 + \frac{1}{2} \times b \times h \times \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{4}$$

سوال: میان این شش ضلعی بر اساس محورهای x و y و مرکز ثقل آن را پیدا کنید.



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{18 \times 6 \times (20 + \frac{6}{2}) + 20 \times 6 \times (\frac{20}{2})}{18 \times 6 + 20 \times 6} = 16.15$$

$$I_{\bar{x}} = (I_{x_1} + Ad^2) + (I_{x_2} + Ad^2) =$$

$$(\frac{1}{12} \times 6 \times (20)^3 + 6 \times (20) \times (16.15 - \frac{20}{2})^2) + (\frac{1}{12} \times 18 \times (6)^3 + 18 \times 6 \times (3.85 + \frac{6}{2})^2) = ?$$

$$I_{\bar{x}} = (\frac{1}{12} \times 6 \times (20)^3) + (\frac{1}{12} \times 18 \times (6)^3 + 18 \times 6 \times (20 + \frac{6}{2})^2) =$$

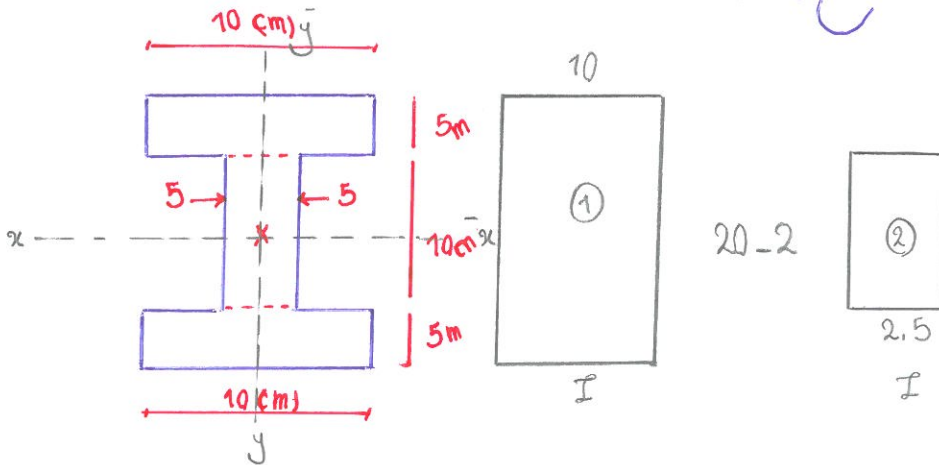
$$I_{\bar{x}_1} = (\frac{1}{12} \times 6 \times (20)^3 + 20 \times 6 \times (\frac{20}{2} + 10)^2) + (\frac{1}{12} \times 18 \times (6)^3 + 18 \times 6 \times (\frac{6}{2} + 20 + 10)^2) =$$

شکل اول: شش ضلعی مرکب
شکل دوم: شش ضلعی مرکب

شکل اول: شش ضلعی مرکب

شکل دوم: شش ضلعی مرکب

سوال: مثال اینرسی مقطع زیر را حل کنید. $\bar{y}$ و $\bar{x}$ پیماس است اورید.



$$I_{\bar{x}_1} = \left(\frac{1}{12} \times 10 \times (20)^3 \right) = \frac{20000}{3} \quad \text{چون } \bar{x} \text{ دیکه } Ad^2 \text{ نهی نهی}$$

$$2I_{\bar{x}_2} = 2 \times \left(\frac{1}{12} \times (10-5) \times (10)^3 \right) =$$

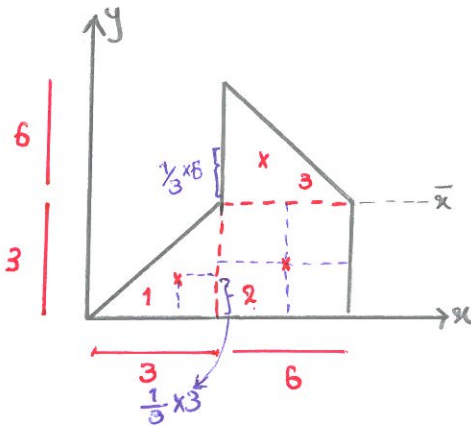
$$I_x = I_{\bar{x}_1} - 2I_{\bar{x}_2}$$

$$I_{\bar{y}_1} = \left(\frac{1}{12} \times 20 \times (10)^3 \right) =$$

$$2I_{\bar{y}_2} = 2 \times \left(\frac{1}{12} \times 10 \times \frac{10-5}{2} \right) =$$

$$I_y = I_{\bar{y}_1} - 2I_{\bar{y}_2}$$

سوال: میان اینی شکل زیر احوال تکوهای x و $\bar{x}$ را بدست آورید.



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times (\frac{1}{3} \times 3) + 6 \times 3 \times (\frac{3}{2}) + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times (3 + \frac{1}{3} \times 6)}{\frac{1}{2} \times 3 \times 3 + 6 \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6} = \bar{y} = 3$$

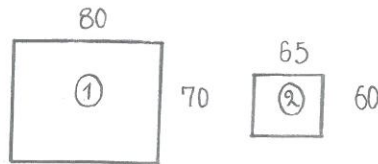
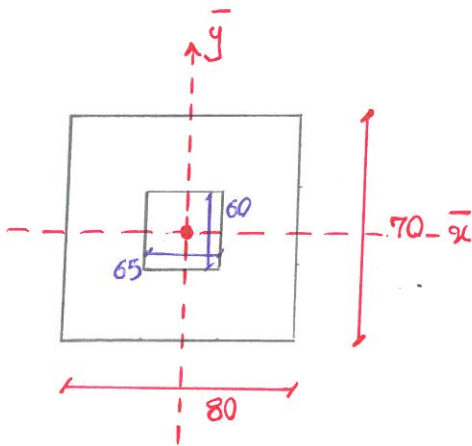
$$I_{\bar{x}} = \left(\frac{1}{36} \times 3 \times (3)^3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times (3-1)^2 \right) + \left(\frac{1}{12} \times 6 \times (3)^3 + 6 \times 3 \times \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{36} \times 6 \times (6)^3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \left(\frac{1}{3} \times 6 \right)^2 \right)$$

فاصله مرکز سطح شکل (1) تا محور $\bar{x}$ فاصله مرکز سطح شکل (2) تا محور $\bar{x}$ فاصله مرکز سطح شکل (3) تا محور $\bar{x}$

در مثل

$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{12} \times 3 \times (3)^3 + \frac{1}{3} \times 6 \times (3)^2 + \frac{1}{36} \times 6 \times (6)^3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \left(\frac{1}{3} \times 6 + 3 \right)^2$$

ب: میان اینرسی حول محور $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را بدست آورید.



$$I_{\bar{x}_1} = \left(\frac{1}{12} \times 80 \times (70)^3 \right) = 2286666.67$$

$$I_{\bar{x}_2} = \frac{1}{12} \times (-7 - 65) \times (60)^3 = 1117000$$

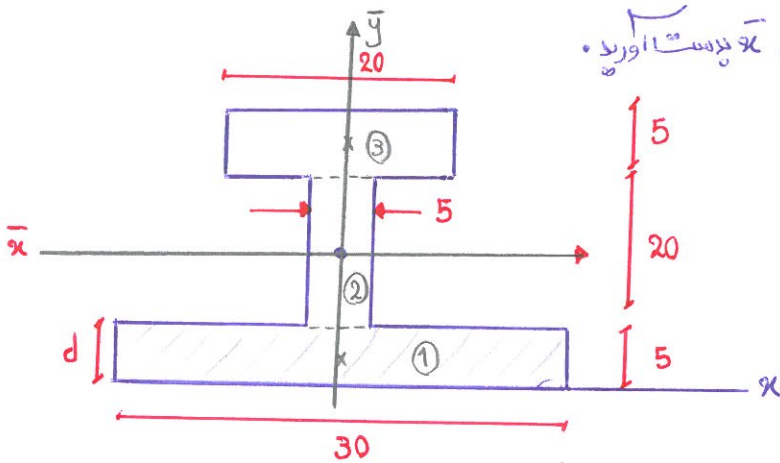
$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{x}_1} - 2 I_{\bar{x}_2} = 1169666.67$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{1}{12} \times (70) \times (80)^3 = 2986666.67$$

$$I_{\bar{y}_2} = \frac{1}{12} \times (60) \times (65)^3 = 1373125$$

$$I_{\bar{y}} = I_{\bar{y}_1} - I_{\bar{y}_2} = 1613541.67$$

ج: معانہ ایسے ہی اصول کے تحت اورید۔



$$I_x = \frac{1}{3} \times (30) \times (5)^3 + \frac{1}{12} \times (5) (15)^3 + 5 \times 15 \times \left(5 + \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times (20) \times (5)^3 = \dots$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{5 \times 30 \times \left(\frac{5}{2}\right) + 15 \times 5 \times \left(5 + \frac{15}{2}\right) + 5 \times 20 \times \left(5 + 15 + \frac{5}{2}\right)}{5 \times 30 + 15 \times 5 + 5 \times 20} = d$$

$I_{\bar{x}} =$

$$\frac{1}{12} \times (30) (5)^3 + 5 \times 30 \left(d - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times 5 \times (15)^3 + 5 \times 15 \left(d - \left(5 + \frac{15}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12} \times (20) (5)^3 + 5 \times 20 \left((15 + 5 + \frac{5}{2}) - d\right)^2$$

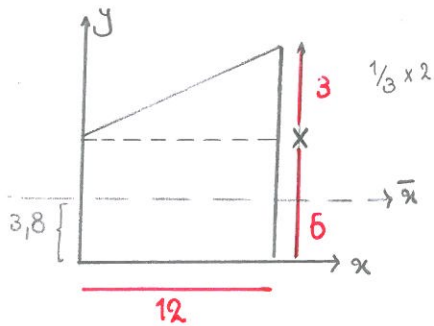
$$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2 = \frac{1}{12} bh^3 (b \times h) \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3$$

ایستای ۱، جلیقه چهارم ۶۶، ۸، ۶

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \sim \text{مقدار زیرشی} \\ A \sim \text{سطوح}$$

شعاع زبرایتون: (به لایه های مغزوفه)

مثال: در شکل زیر مقادیر r_x و $r_{\bar{x}}$ را حساب کنید.



$$r = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r = \sqrt{\frac{I_{\bar{x}}}{A}}$$

$$A = 72 + \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 12\right)$$

$$A = 72 + 18 = 90$$

$$I_x = \frac{1}{3} \times 12 \times (6)^3 + \frac{1}{36} \times 12 \times (3)^3 + \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 12\right) \left(6 + \frac{1}{3} \times 3\right)^2$$

$$r_x = \sqrt{\frac{1032}{90}} = 11,5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{12 \times 6 \times \left(\frac{6}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 3 \times 12 \times \left(\frac{1}{3} \times 3 + 6\right)}{12 \times 6 + \frac{1}{2} \times 3 \times 12}$$

$$= \bar{y} = \frac{342}{90} = 3,8$$

$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{12} \times (12) \times (6)^3 + \frac{1}{36} \times 12 \times (3)^3 + \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 3\right) \left(5 + \frac{1}{2} \times 3\right)^2 = 1107 \quad r_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1107}{90}} = 12,3$$

$$Q = \sum \bar{y} A$$

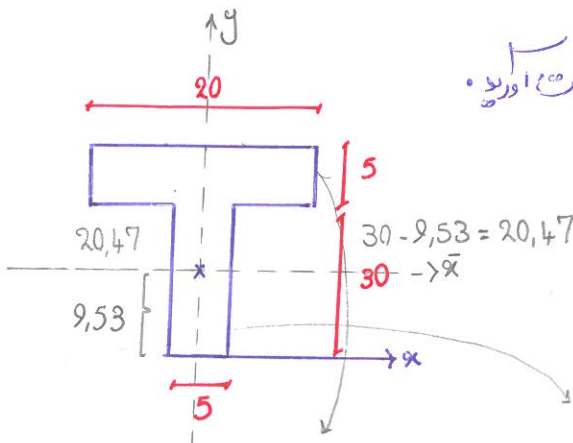
گشتاور اول سطحی:

برای نقاطی که بالای مرکز جرم هستند مثبت است.

برای نقاطی که زیر مرکز جرم هستند منفی است.

* مرکز جرم و محوری است. بنابراین مرکز سطح عبور می کند.

مثال: محاسبه گشتاور اول سطح را به سطح زیرین است آورید.



$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{20 \times 5 \times \left(30 + \frac{5}{2}\right) + 5 \times 30 \times \left(\frac{30}{2}\right)}{20 \times 5 + 5 \times 30} = 9.53$$

$$Q = \sum \bar{y}_i A_i = 5 \times 20 \times \left(\frac{5}{2} + 30 - 9.53\right) + (5 \times 20.47) \times \frac{20.47}{2}$$

$$Q = + 3344.55 \quad \text{ج}$$

$$Q = (\sum \bar{y}_i A_i) = -\left(9.53 \times 5 \times \frac{9.53}{2}\right) = -227.05$$

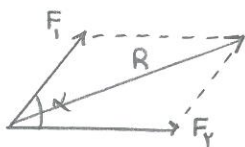
$$Q_{\text{کل}} = Q + Q = +3344.55 + (-227.05) = 3117.5$$



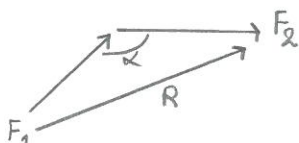
هم‌جهت هستند
 $R = F_1 + F_2$



هم‌راستا هستند
 $R = [F_2 - F_1]$

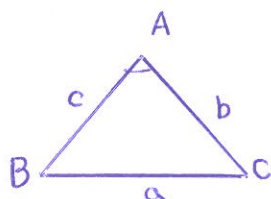


این دو را با هم منطبق هستند
 $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$
 برای بردار روی آنها قرار اول است



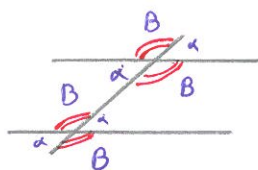
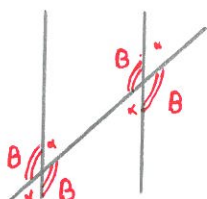
$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha$

یادآوری:



قانون سینوس ها:
 $\frac{\sin c}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

قانون کسینوس ها:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$



هم‌اگر دو خط موازی داشته باشیم خطی قطع کند

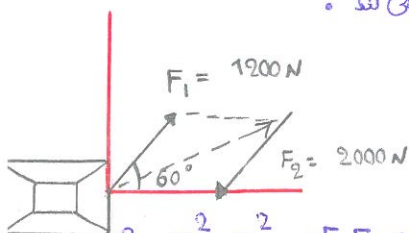
روایی متبادل داخلی و خارجی:

خطی که دو پاره خط موازی را قطع کند. روایی خطی داخلی و خارجی مساوی ایجاد می کند.

مثال: در شکل زیر مطلوب است محاسبه:

الف: مقدار برآیند

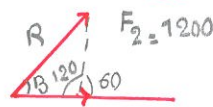
ب: زاویه برآیند با افق



$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$

$R^2 = (1200)^2 + (2000)^2 + 2 \times (1200 \times 2000) \times \frac{1}{2} = (2800)^2$



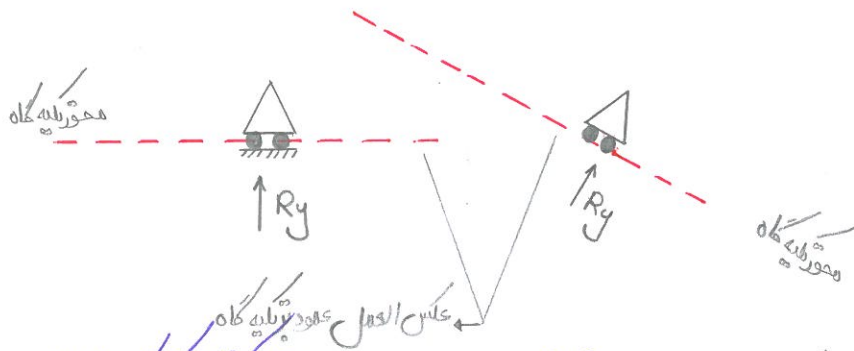
$\frac{\sin 120}{2800} = \frac{\sin B}{1200 = F_2}$

$\sin B = \frac{1200 \times \sqrt{3}/2}{2800}$

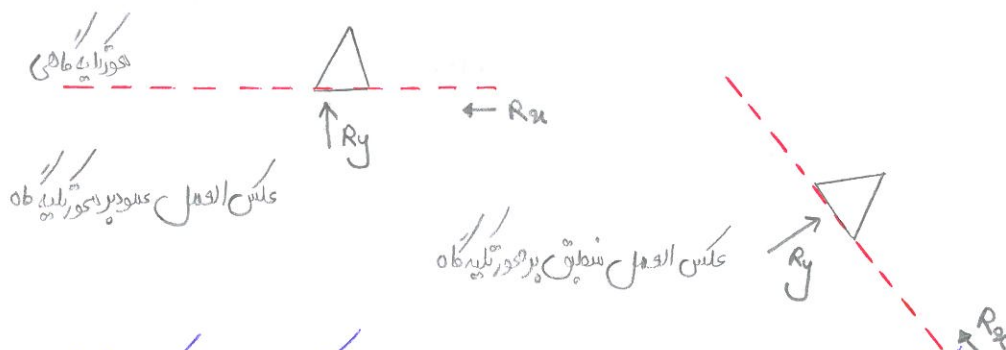
انواع تکیه گاه در حالت دوبعدی :

۱- **تکیه گاه غلطی :** این تکیه گاه را نماد  یا  یا  می‌نماید.

نمایش می‌دهند . و دارای یک مؤلفه واکنش تکیه گاهی از عینش می‌باشد . نه به صورت عمود بر محور تکیه گاه وارد می‌شود .

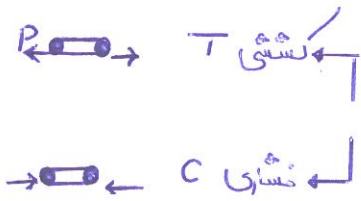


۲- **تکیه گاه مفصلی :** این تکیه گاه را با نماد  یا  نمایش می‌دهند . و دارای دو مؤلفه واکنش تکیه گاهی می‌باشد .



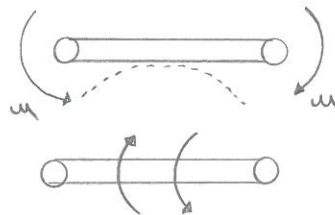
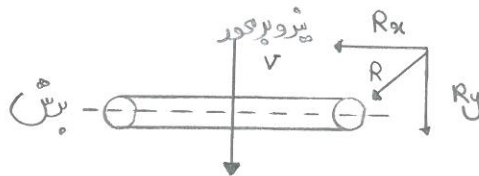
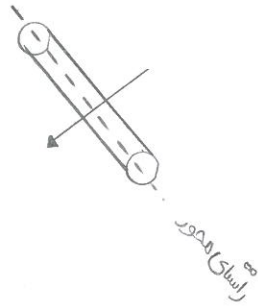
۳- **تکیه گاه گیردار :** این تکیه گاه را با نماد  نمایش می‌دهند . دارای سه مؤلفه واکنش است . که ۲ تای آن را از جنس نیرو که در راستای محور تکیه گاه است . و یکی از آن از عینش گشتاور است .





انواع نیرو:

- محوری: این نیرو بر اساسی محور عضو وارد می شود.
- مماسی: این نیرو بر اساسی عمود بر محور عضو وارد می شود.

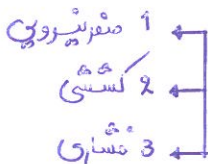


انواع گسار:

- خمشی
- پیچشی

تحلیل خرپاها: خرپا اعضای هستند که اعضای تحلیل دهنده آنها فقط می توانند نیروی محوری (کششی، فشاری) تحمل کنند.

تحمل کنند: نیروی پرسی و گسترهای خمشی پیچشی را نمی توانند تحمل کنند.



در کل اعضای خرپا سه حالت می توانند داشته باشند:

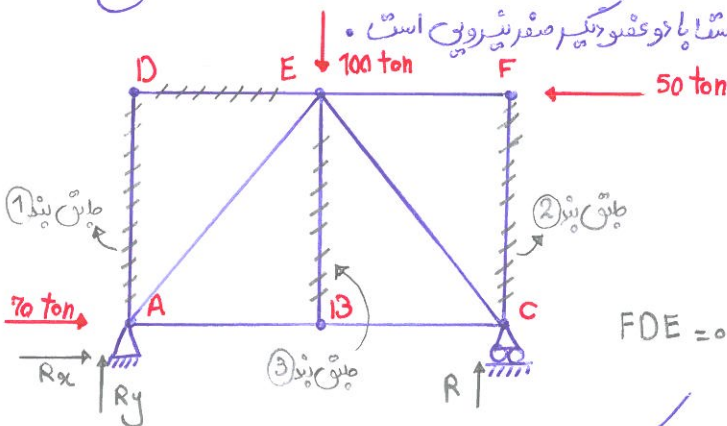
تعریف لره: شکل پسین اعضای خرپایی به هم دیگر اگر نه ای گویند.

روش تشخیص اعضای صفر نیروی در خرپا :

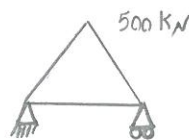
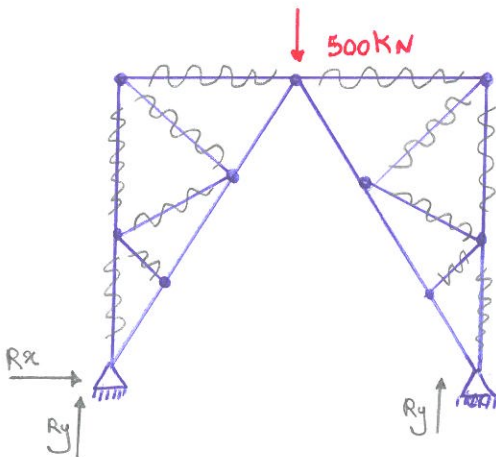
۱. اگر در خرپای گره‌ای دو عضو داشته باشد. نه اول این دو عضو هم امتداد نیافتند و ثانیاً نیروی به این گره وارد نشده باشد. هر دو عضو صفر نیروی هستند.

۲. اگر در خرپای گره‌ای دو عضو داشته باشیم. که این دو عضو هم امتداد نیافتند و نیروی کمالات در راستای یکی از این دو عضو وارد شده باشد. آنگاه نیرو در عضو دیگر هم راستای راستی اعمال نیرو و مسدود صفر است.

۳. اگر در خرپای گره‌ای سه عضو داشته باشیم. به طوری که دو عضو این سه عضو هم راستا باشند. و هیچ نیروی به این گره وارد نشده باشد. آنگاه عضو نیز و غیر هم راستا با دو عضو دیگر صفر نیروی است.



تئوریم : در خرپای هر اعضای صفر نیروی را تشخیص کنید.



نکته :
اگر یک گره طبق سه تئوریم صفر نیرو باشد.
آن گره صفر است

روش های تحلیل خنثی :

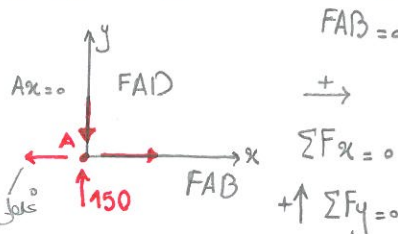
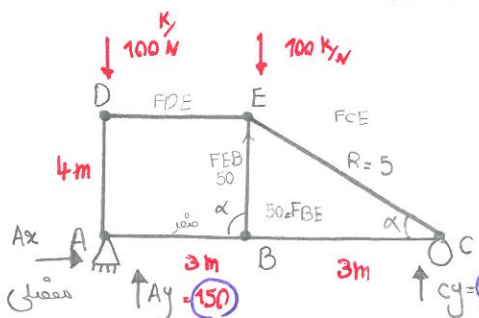
- روش گره به گره (روش مفصلی) : در این روش برای تحلیل خنثی از گره های شروع می کنیم که مجهولی است. بوجه صورت گره به گره کل گره های خنثی را تحلیل می کنیم.
 گره ای که آموزش داریم این روش زمانی استفاده می شود که بخواهیم نیروها در تمام اعضای خنثی بدست آوریم.
- روش پخش زنی : (روش مقطع یا سلس زنی) : از این روش زمانی استفاده می شود که بخواهیم نیروهای پخش زنی خاص خنثی بدست آوریم.

انواع معادلات استاتیکی :

$$\begin{aligned}
 & \sum F_x = 0 \\
 & \sum F_y = 0 \\
 & \sum M = 0
 \end{aligned}$$

مجموع نیروها در راستای x (افقی) متساوی صفر باشد.
 مجموع نیروها در راستای y (عمودی) متساوی صفر باشد.
 مجموع گشتاور حول آن نقطه صفر است.
 + ساعتگرد - پادساعتگرد - هستند

سؤال : خنثی برابر روش گره به گره بدست آورید و تحلیل کنید.



$$F_{AB} = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$150 - F_{AD} = 0 \rightarrow$$

$$F_{AD} = 150$$

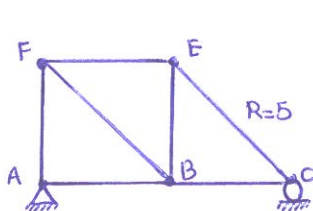
$$F_{AD} = F_{DE}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

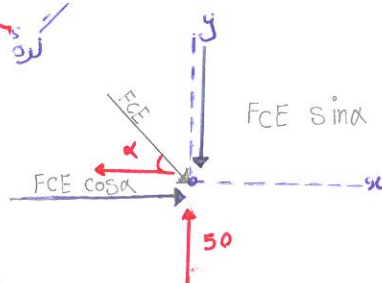
$$\sum M_A = 0 \rightarrow -100 \times 3 + C_y \times 6 = 0 \rightarrow C_y = \frac{300}{6} = 50$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 50 - 100 - 100 = 0$$

$$A_y = 150$$



لرزه C



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{CE} \times \frac{3}{5} - F_{CB} = 0$$

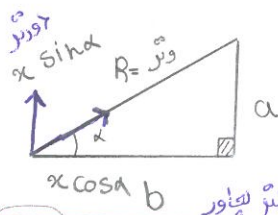
$$F_{CB} = F_{CE} \times \frac{3}{5}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$50 - F_{CE} \times \frac{4}{5} = 0$$

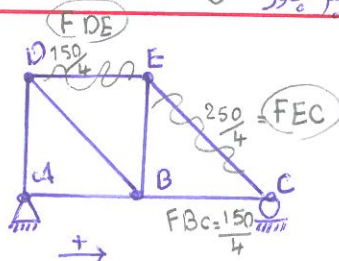
$$F_{CE} = \frac{5 \times 50}{4} = \left(\frac{250}{4}\right) \text{ CE}$$

$$F_{CB} = \frac{250}{4} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{150}{4}\right) \text{ CB}$$

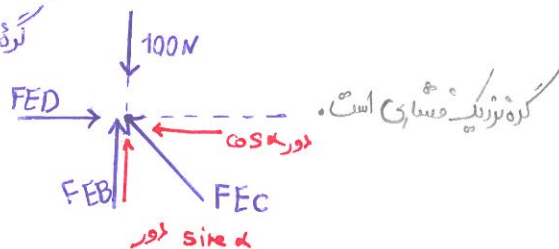


$$\cos \alpha = \frac{\text{وتر به ضلع مجاور}}{R} = \frac{b}{R}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{وتر به ضلع مقابل}}{R} = \frac{a}{R}$$



لرزه E



کره تریک فشاری است.

$$\sum F_x = 0$$

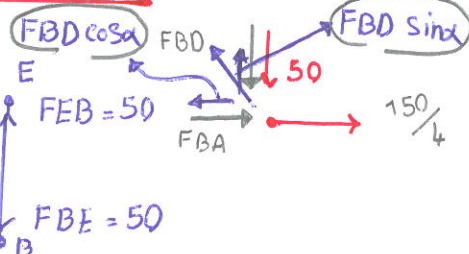
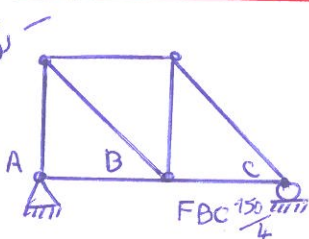
$$F_{ED} - F_{EC} \times \cos \alpha = 0$$

$$F_{ED} - F_{EC} \times \frac{3}{5} = \frac{250}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{150}{4}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$100 - F_{EB} - F_{EC} \times \sin \alpha = 0$$

$$F_{EB} = 100 - F_{EC} \times \sin \alpha = 100 - \frac{250}{4} \times \frac{4}{5} = 50$$



$$\sum F_x = \frac{150}{4} + F_{BA} - F_{BD} \cos \alpha = 0$$

$$F_{BD} \times \sin \alpha - 50 = 0$$

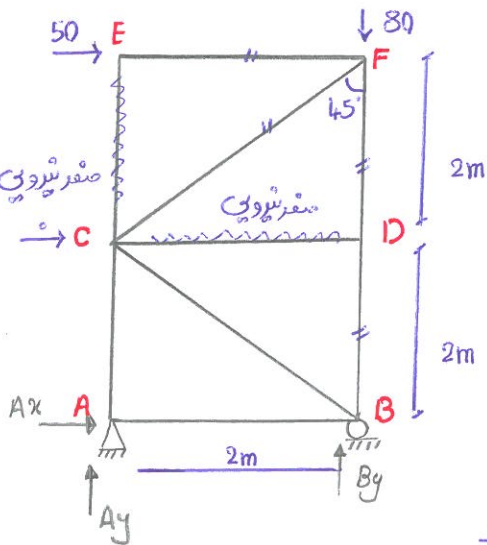
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BD} \sin \alpha = 50$$

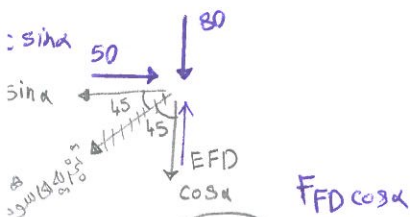
$$F_{BD} \times \frac{4}{5} = 50 \quad F_{BD} = \frac{150}{4}$$

نمونه سوال :

میخواهیم این اعضا را جدا کنیم



$$\sum F_x = 0 \quad 50 - f_{EF} = 0 \rightarrow f_{EF} = 50$$



$$\sum F_x = 0$$

$$50 - f_{FC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$-50 = f_{FC} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

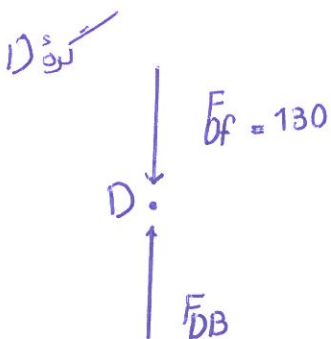
$$f_{FC} = \frac{50 \times 2}{\sqrt{2}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-f_{FC} \times \cos 45^\circ + f_{FD} - 80 = 0 \Rightarrow$$

$$f_{FD} = 80 + \frac{50 \times 2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f_{FD} = 130 \text{ فشار}$$

$$f_{FD} = f_{DB} \text{ می دانیم}$$



$$\sum F_y = 0 \quad 130 - f_{DB} \Rightarrow f_{DB} = 130$$

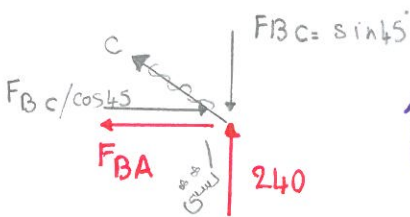
عكس العمل تليها ما هي :

$\sum M_A = 0$

$+By \times 2 - 80 \times 2 - 60 \times 2 - 50 \times 4 = 0$
 $2By = 160 + 120 + 200 = 480$
 $By = \frac{480}{2} = 240$ مساري

$\downarrow \sum F_y = 0$ $80 - 240 - Ay = 0 \rightsquigarrow (-160) = Ay$ لستبي

$\rightarrow \sum F_x = 0$ $(\circ) Ax + 60 + 50 = 0 \rightsquigarrow Ax = (-110)$ لستبي



$\uparrow \sum F_y = 0$ $240 - F_{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$F_{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 240 \Rightarrow F_{BC} = \frac{2 \times 240}{\sqrt{2}}$ مساري

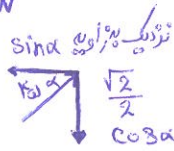
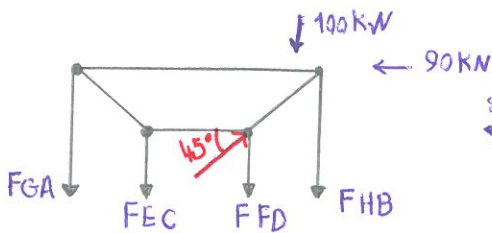
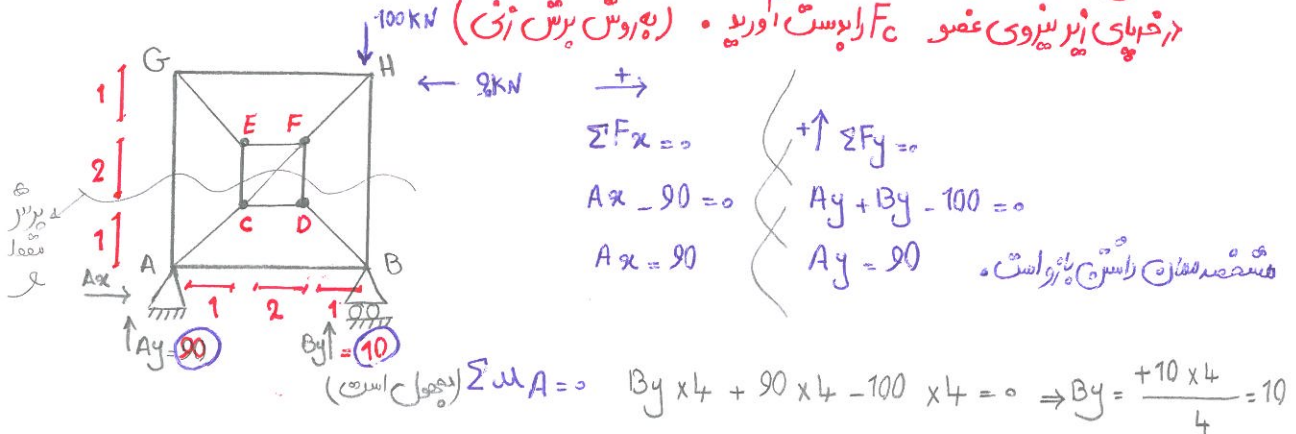
$\rightarrow \sum F_x = 0$ $\frac{2 \times 240}{\sqrt{2}} + F_{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{BA} = 0 \rightarrow F_{BA} = 240$ لستبي

روش پرسش زنی در تحلیل خنثی

در این روش پرسش را طوری می‌زنیم که پرسش از پرسش زنی بتوانیم با معادله $\sum F_x = 0$ یا $\sum F_y = 0$ یا $\sum M = 0$ می‌زنیم. می‌توانیم از نظر رابست آورد.

سؤال: $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M = 0$

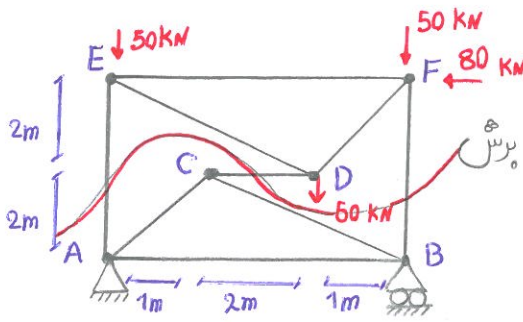
در خنثی پرسش زنی عضو F_c رابست آورد. (روش پرسش زنی)



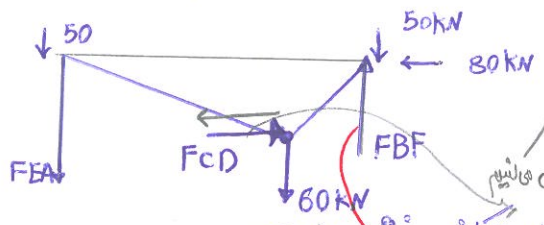
$$F_c \cos \alpha - 90 = 0$$

$$F_c = \frac{90 \times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{90 \times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 90\sqrt{2}$$

سوال :



در چارچای زیر نیروی اعضای AE، CD، BF را بیست آورید.



$$\sum F_x = 0 \quad -F_{CD} - 80 = 0 \rightarrow F_{CD} = -80$$

نکته : چون منفی است یعنی کشش است. جهت استیلا عوض می کنیم. و باید آن را درست کنیم و منفی است.

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -50 \times 4 - F_{BF} \times 4 - 60 \times 3 + 80 \times 2 = 0$$

$$F_{BF} \times 4 = -200 - 180 + 160 = -220 \quad F_{BF} = \frac{-220}{4} = -55$$

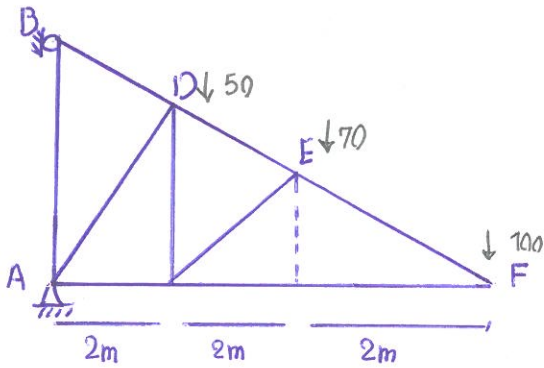
چون منفی است یعنی کشش است. جهت استیلا عوض می کنیم.

از ازل به این صورت بوده حالت فشاری (-) جهت عوض می شود.

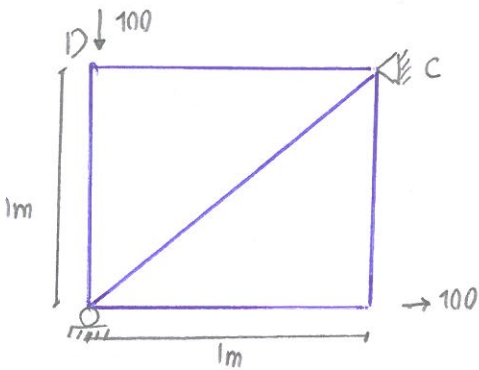
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad +55 - 60 - F_{EA} - 50 - 50 = 0$$

FEA = -105. جهت کشش است. استیلا عوض می کنیم.

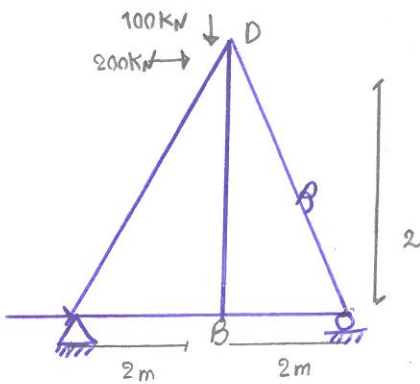
نیروی عضو CD را به روش پش زنی بیست آورید ؟



نیروی عضو AC را به روش پش زنی بیست آورید ؟

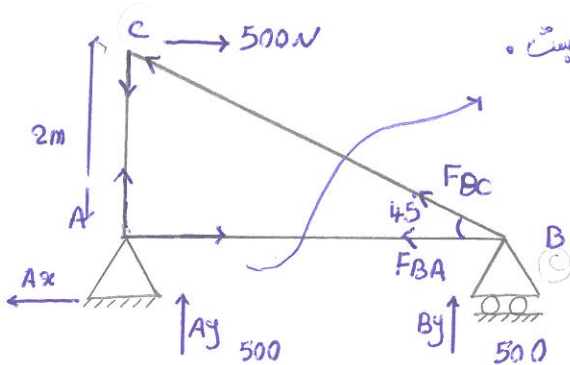


حرکتی زیر بار به روش گره بگره حل کنید



سؤال: نیروهای اعضا را بر سر آکورد پندروش کرده کرد.

نکته: این شروشرش شود. چون هم شروشر A_x دارد و هم غلطی نیست.

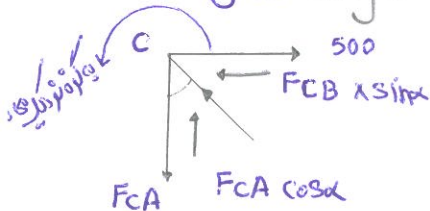


$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad 500 - A_x = 0 \rightarrow 500 = A_x$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow + B_y \times 2 - 500 \times 2 = 0$$

$$B_y \times 2 = 1000 \Rightarrow B_y = 500$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -A_y = + (B_y = 500) = 0 \Rightarrow A_y = 500$$

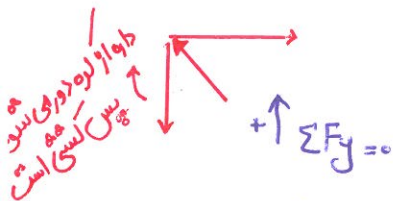


$$\sum F_x = 0$$

$$-500 + F_{CB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$500 = F_{CB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_{CB} = \frac{2 \times 500}{\sqrt{2}} + \frac{100}{\sqrt{2}}$$

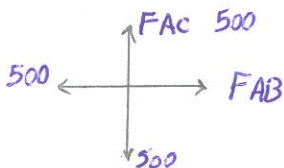
فشاری



$$F_{CB} \cos e - F_{CA} = 0$$

$$\frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = F_{CA} = F_{CA} = 500$$

لستی



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AB} - 500 = 0 \rightarrow F_{AB} = 500$$

لستی

$$F_{BCA} = F_{AB} = 500$$

$$F_{CB} = F_{BC} = \frac{1000}{\sqrt{2}}$$

فشاری

تعداد اعضای خرابا ←

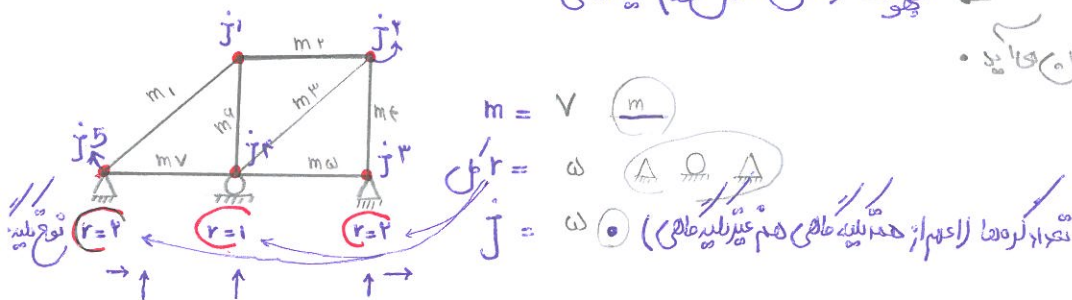
درجه نامایی $n = (m + r) - 2j$

تعداد گره ها $\bullet$ ← $\hookrightarrow$ عکس العمل تکیه ها

تکیه ها (عکس العمل ها) تکیه ها

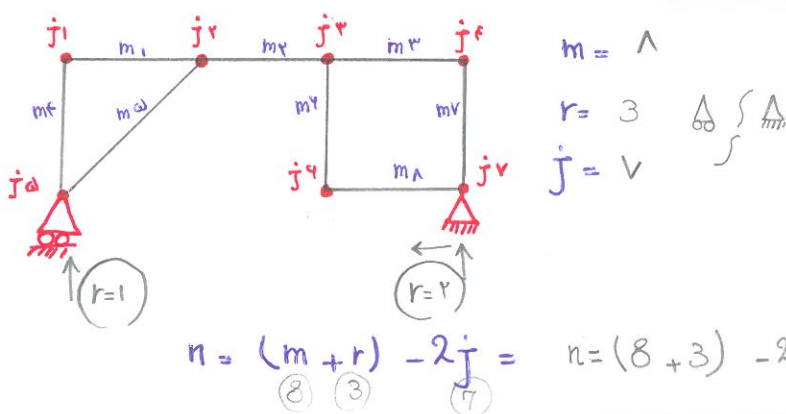
* هم در اتصال ها

$n > 0$ نامعین
 $n = 0$ معین
 $n < 0$ نامایا



$$n = (m + r) - 2j = (10 + 3) - 2 \times 7 = (13 - 14) = -1 < 0$$

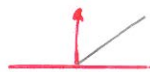
نامعین / در نظر از مفر



$$n = (m + r) - 2j = (11 + 3) - 2 \times 8 = (14 - 16) = -2 < 0$$

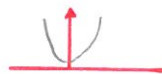
نامعین / در نظر از مفر

$$y = ax$$



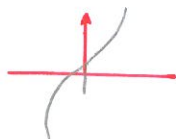
خطی

$$y = ax^2$$

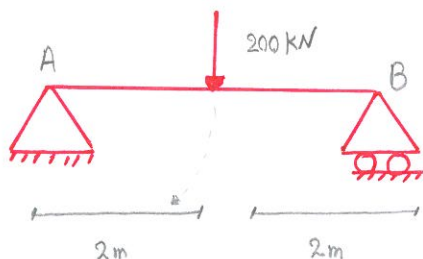


مربعی

$$y = ax^3$$



مکعبی



سؤال:
(1). واکنش تکیه‌گاهی:

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$A_y = B_y = \frac{200}{2} = 100$$

از روی شکل می‌توانیم گفت تعادل است و مساوی

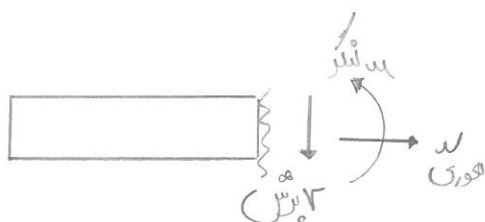
$$\sum M_A = -200 \times 2 + B_y \times 4 = 0 \rightarrow B_y \times 4 = +200$$

$$B_y = \frac{400}{4} = 100$$

$$\uparrow \sum F_y = A_y + 100 - 200 = 0 \rightarrow A_y = 100$$

توانش برش برای تحلیل تیر:

اگر جهت تحلیل تیر از چپ به راست باشد.

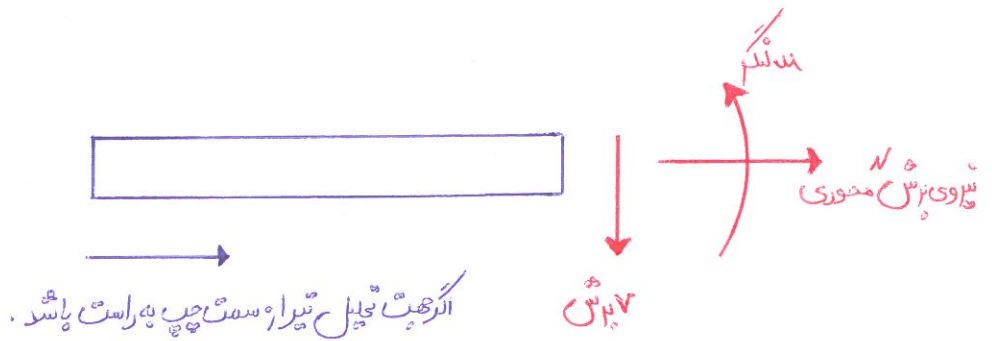


در این حالت اگر تیر گسسته نداشته باشیم $m' = 0$ است

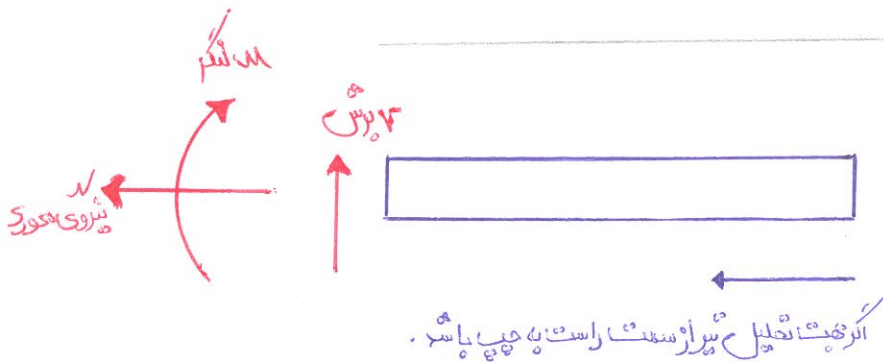
اگر جهت تحلیل تیر از چپ به راست باشد.

در این حالت اگر تیر گسسته نداشته باشیم $m' = 0$

* شواش پیش زنی برای تحلیل می

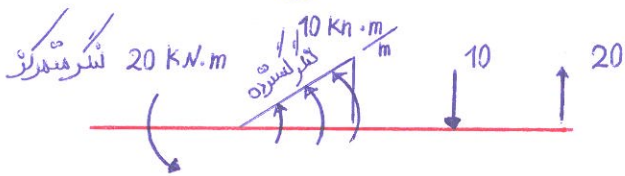


در این حالت اگر لنگر گسسته نداشته باشیم. باید $V = u'$ شود.



در این حالت اگر لنگر گسسته نداشته باشیم. باید $-V = u'$ شود.

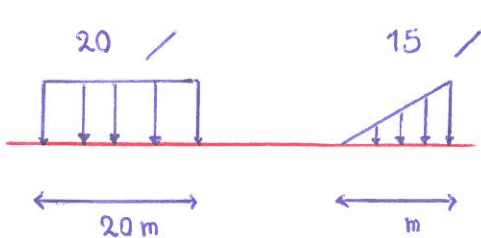
* در معادله $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ لنگرها (چه متمرکز و چه گسترده) هیچ حالتی ندارند و تاثیری
داره نمی شود. یعنی



$$\uparrow \oplus \sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + 20$$

کاری به لنگرها نداریم

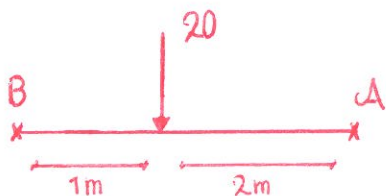
* در معادله $\sum F_y = 0$ بارهای گسترده نیروی را فقط مساحت آن ها را حساب می کنیم.



مساحت پارتیکل مساحت پارتیکل

$$\uparrow \oplus \sum F_y = 0 \Rightarrow -(20 \times 2) - \left(\frac{15 \times 1}{2} \right)$$

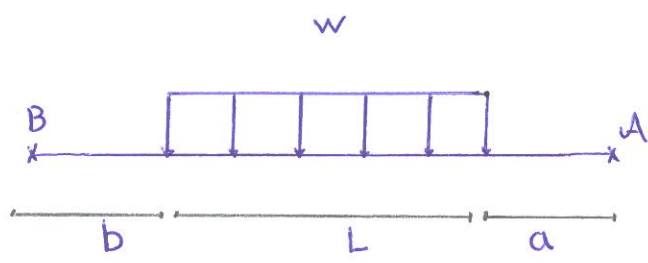
* در معادله $\sum M = 0$ برای بارهای متمرکز آن بار را در بازوی گسترده ضرب می کنیم.



$$\oplus \sum M_A = 0 \Rightarrow +20 \times 2$$

$$\oplus \sum M_B = 0 \Rightarrow -20 \times 1$$

* نحوه گشتاورگیری از پارسیده :



$$\sum \mathcal{M}_A = 0 \Rightarrow + (wL) \left(a + \frac{L}{2} \right)$$

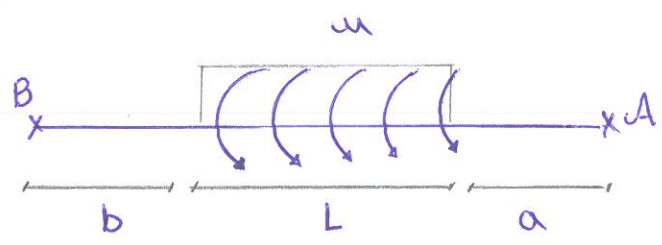
$$\sum \mathcal{M}_B = 0 \Rightarrow - (wL) \left(b + \frac{L}{2} \right)$$

فاصله مرکز سطح بار تا نقطه A نه حول آن گشتاور میگیریم.

فاصله مرکز سطح بار تا نقطه B نه حول آن گشتاور میگیریم.

* نحوه گشتاورگیری از لنگر گسسته :

فقط مساحت آن را حساب می کنیم.



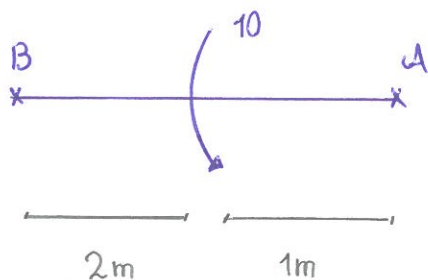
$$\sum \mathcal{M}_A = 0 \Rightarrow + (wL)$$

$$\sum \mathcal{M}_B = 0 \Rightarrow + (wL)$$

نکته :

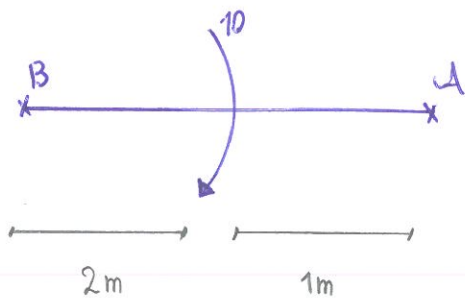
هر دو + شده است. چون همداری به نقطه ای که حول آن گشتاور میگیریم. در این حالت نداریم.

نحوه مسأله از کتاب



$$\sum \mathcal{M}_A = 0 \Rightarrow +10$$

$$\sum \mathcal{M}_B = 0 \Rightarrow +10$$

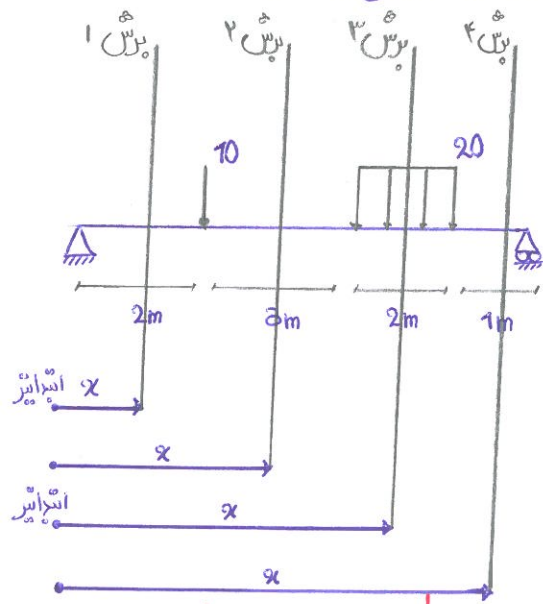


$$\sum \mathcal{M}_A = 0 \Rightarrow -10$$

$$\sum \mathcal{M}_B = 0 \Rightarrow -10$$

نکته: وقتی می‌خواهیم تیری را بیش نزنیم. به دورش می‌توانیم عمل کنیم. (هر دورش درست است)

روش اول: x روی شکل همواره از انبساطی بین تا قبل بیش پاژه x به صورت صحیحی است.



بیش اول $0 \leq x \leq 2$

بیش دوم $2 \leq x \leq 5$

بیش سوم $5 \leq x \leq 7$

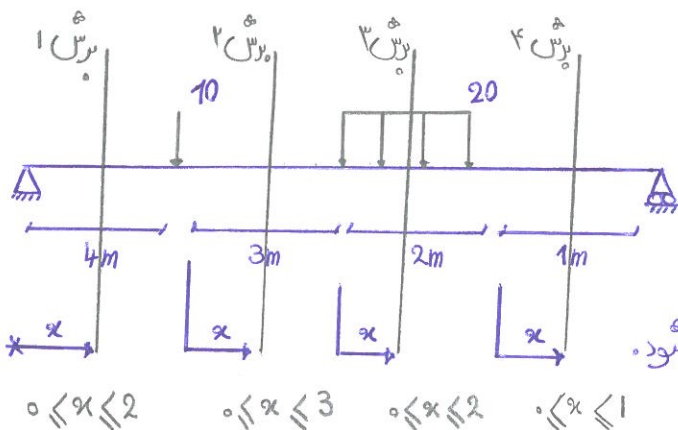
بیش چهارم $7 \leq x \leq 8$

⚠️ ملاحظه می‌شود پاژه‌های x به صورت صحیحی است.

⚠️ ملاحظه می‌شود x روی شکل همواره از انبساطی بین تا قبل بیش است.

روش دوم: x روی شکل از انبساطی پاژه‌های که می‌توانیم بیش نزنیم تا قبل بیش

پاژه x همواره از صفر تا طول پاژه بیش است.



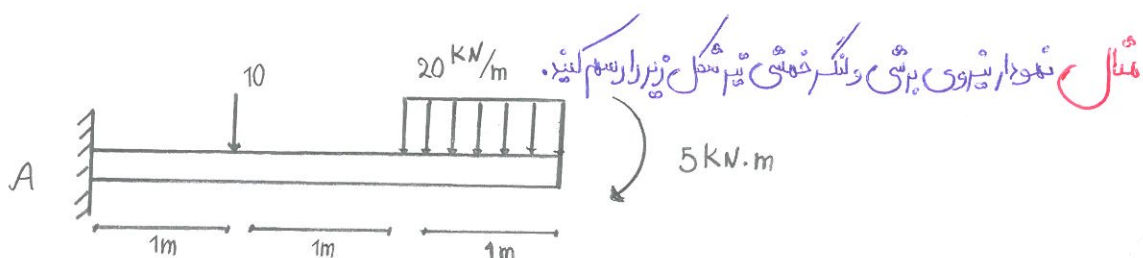
$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq x \leq 3$

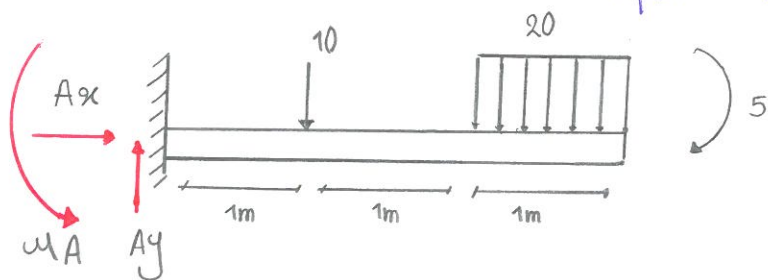
$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq x \leq 1$

در این کلاس و جزوه همواره از روش اول استفاده می‌شود.



حل مسئله:
انتخاب عین الفیل های کلیه را درست می آوریم:



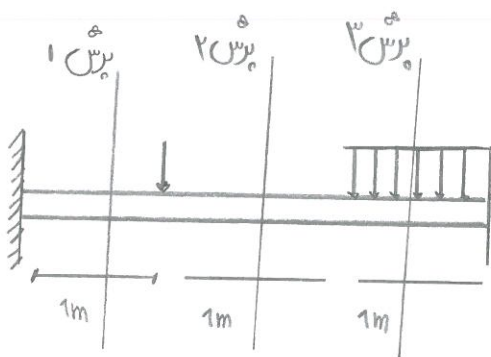
1. $\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - (10)(1) - (20 \times 1)(1 + 1 + \frac{1}{2}) + 5 = 0$

$\Rightarrow M_A = 65 \text{ kN.m}$

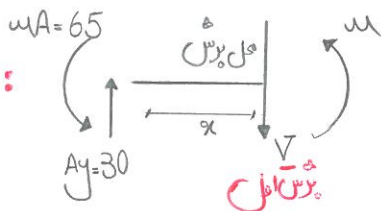
2. $\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 10 - (20 \times 1) = 0 \Rightarrow A_y = 30 \text{ kN}$

3. $\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

نکته: حال این تیر به سه روش برش میزنند.



بررسی پیش اول ۱:
از سمت چپ به راست



$$- \leq x \leq 1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 30 - V = 0 \Rightarrow V = 30$$

$$\circlearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow M + 65 - 30x = 0 \Rightarrow M = 30x - 65$$

در حال پیش

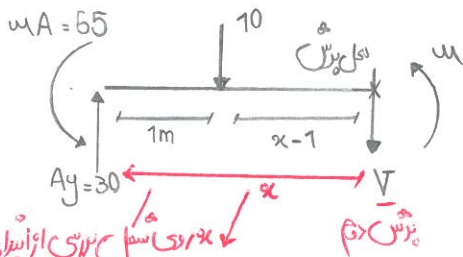
$$\text{اگر } x=0 \rightarrow M = -65$$

$$\text{اگر } x=1 \rightarrow M = -35$$

امکان بررسی کار: چون پیش از سمت چپ به راست بوده و گشتاور گسترده نداریم. $M' = V$

اگر از معادله مشتق بگیریم باید معادله ۲ درست آید.

بررسی پیش دوم ۲:
از سمت چپ به راست



$$1 \leq x \leq 2$$

بازه x به صورت صحیح است.

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 30 - 10 - V = 0 \Rightarrow V = 20$$

$$\circlearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow M + 65 - 30x + 10(x-1) = 0 \Rightarrow M = 20x - 55$$

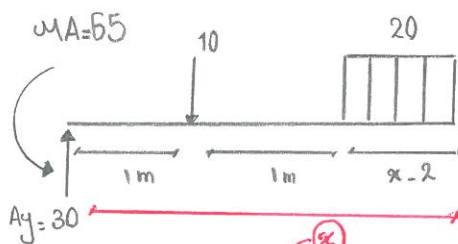
در حال پیش

$$\text{اگر } x=1 \rightarrow M = -35$$

$$\text{اگر } x=2 \rightarrow M = -15$$

امکان بررسی کار: چون پیش از سمت چپ به راست بوده و گشتاور گسترده نداریم. $M' = V$

پیش‌سوم
از سمت چپ به راست



$2 \leq x \leq 3$
پارده x به صورت تکیه‌ای است.

روی پیش‌سوم همواره از انتهای تکیه‌ها شروع می‌شود.

$$\uparrow \oplus \sum F_y = 0 \Rightarrow \dots$$

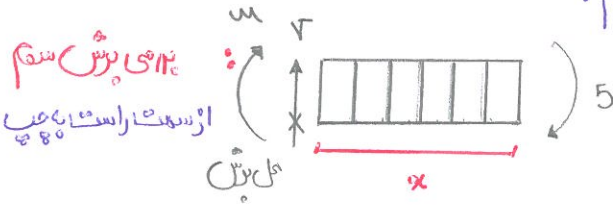
$$\oplus \sum M = 0 \Rightarrow \dots$$

$$M' = V$$

هنگام پیش‌سوم را از سمت راست به چپ می‌زنیم.

انتقال درستی کار:

نکته: در این سوال پیش‌سوم را از سمت راست به چپ می‌زنیم.



وقت شود چوله پیش‌سوم از سمت راست به چپ است.

$$\uparrow \oplus \sum F_y = 0 \Rightarrow V - 20x = 0 \Rightarrow V = 20x$$

اگر $x = 0 \rightarrow V = 0$
اگر $x = 1 \rightarrow V = 20$

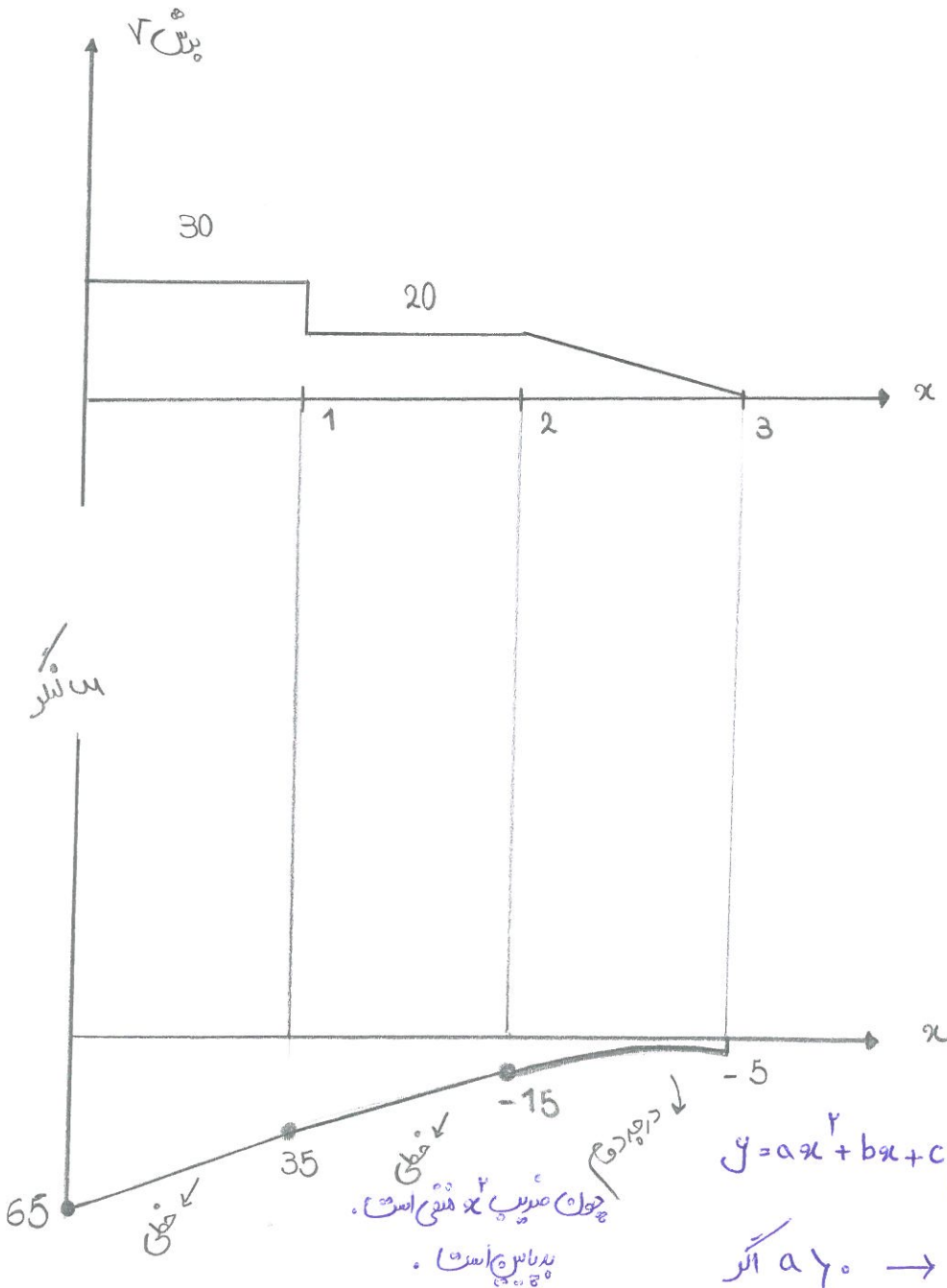
$$\oplus \sum M = 0 \Rightarrow -M - 5 - (20x) \left(\frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow M = -10x^2 - 5$$

اگر $x = 0 \rightarrow M = -5$
اگر $x = 1 \rightarrow M = -15$

انتقال درستی کار: چوله پیش‌سوم از راست به چپ است. و گشتاور گسترده نداریم. باید $M' = -V$

رسم نمودار سؤال

* حالا با توجه به معادلات به دست آمده می‌توانیم نمودارهای پیش و نشر را رسم کنیم.



نکته:

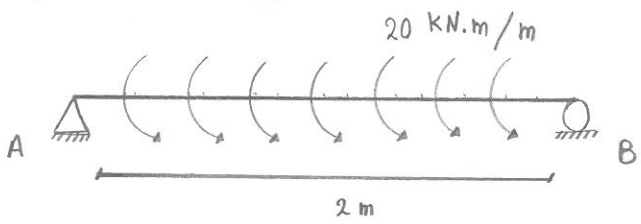
$$y = ax^2 + bx + c$$

اگر $a > 0 \rightarrow \cup$ به بالا

اگر $a < 0 \rightarrow \cap$ به پایین

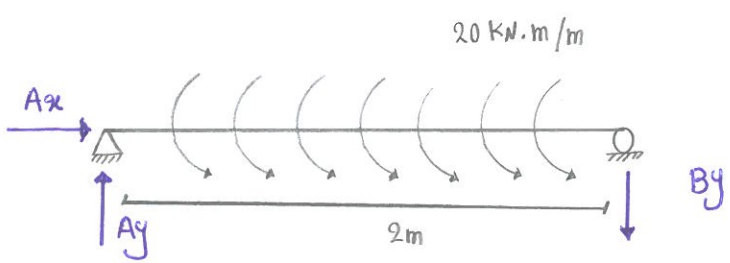
سوال:

یک لولام نیروی پیشی و لنگر خمشی زیر ساده لنگر استرزه نیواخت مسجیل نشان داده شده رسم کنید.



حل سوال

ابتدا عکس الوسل های نیله گاهی را درست می آوریم.

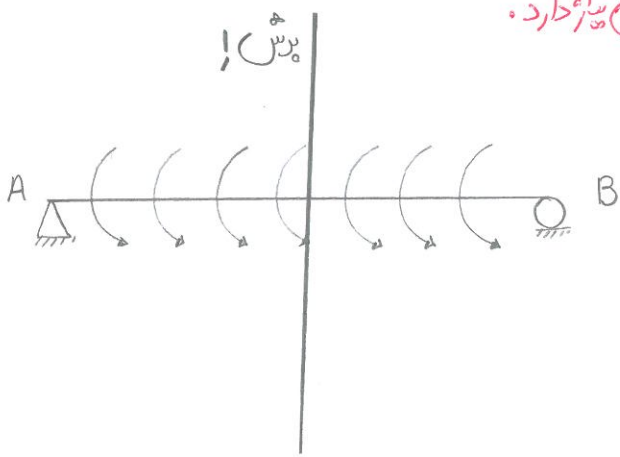


$$\sum M_A = 0 \rightarrow + (20 \times 2) - (B_y)(2) = 0 \rightarrow B_y = 20 \text{ kN}$$

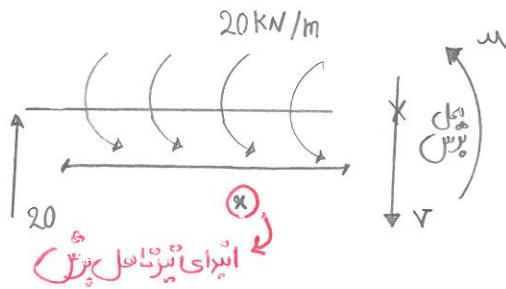
$$\sum F_y = 0 \rightarrow - 20 + A_y = 0 \rightarrow A_y = 20 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

نکته: حالا باید پیش و پس از این تیر را درست می سازد.



بررسی می‌کنیم:
از سمت چپ به راست



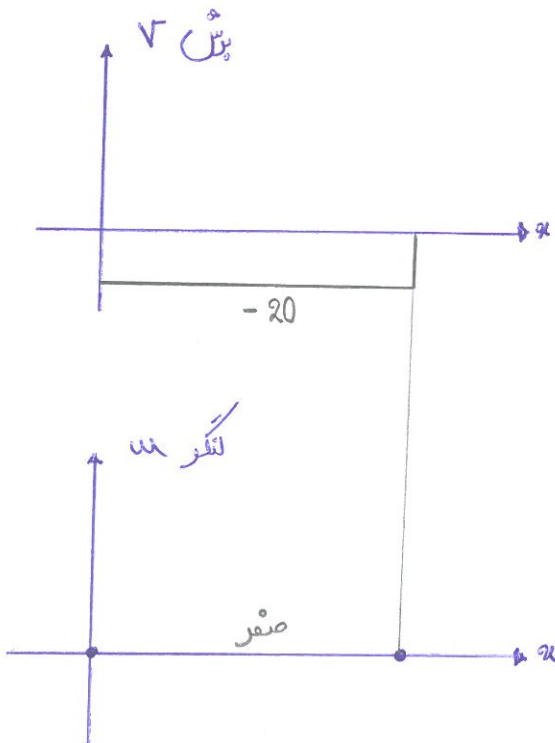
$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow -20 - V = 0 \rightarrow V = -20$$

$$\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow M - 20x + 20x = 0 \rightarrow M = 0$$

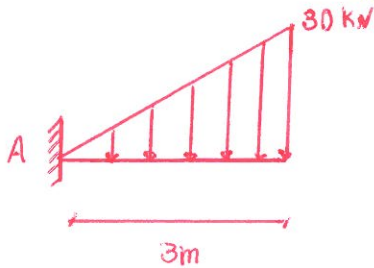
در محل برش

نکته مهم: به دلیل اینکه مشتق تیر مسافتی برش نمی‌شود. (یعنی $M' \neq V$) این است که گسترده داریم.

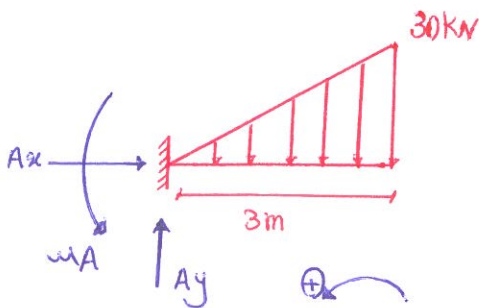
حالا نمودار برش و تیر را می‌توانیم رسم کنیم.



سوال: نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی بر سطح زیر را رسم کنید.



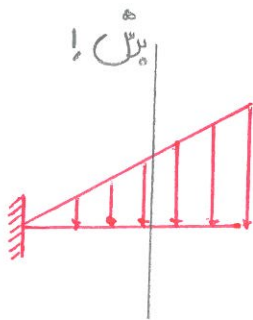
حل: ابتدا گشتاور خمشی و نیروی برش را رسم می‌کنیم.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A - \left(\frac{30 \times 3}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) = 0 \rightarrow M_A = 90 \text{ kN.m}$$

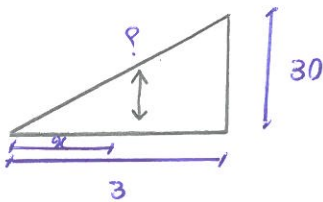
$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - \frac{(30 \times 3)}{2} = 0 \rightarrow A_y = 45 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$



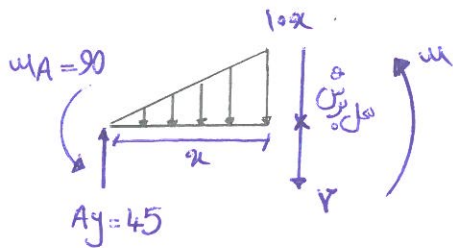
نکته: این نیروها در برش دارد.

در این جا چون بار غیر یکنواخت (غیر مستطیلی) است. وقتی پیش کار کنیم،
شدت بار (مقدار بار) را باید طبق قضیه تالس (ششایه مثلث ها) حساب کنیم.



$$\frac{30}{3} = \frac{?}{x} \Rightarrow ? = 10x$$

حالا پیش را از سمت چپ به راست میزنیم.



$$0 \leq x \leq 3$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 45 - \frac{(10x)(x)}{2} - V = 0 \rightarrow V = 45 - 5x^2$$

اگر $x=0 \rightarrow V = 45$

اگر $x=3 \rightarrow V = 0$

اگر $x=1 \rightarrow V = 40$

اگر $x=2 \rightarrow V = 25$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + 90 + \frac{(10x \cdot x \cdot x)}{2} \left(\frac{x}{3} \right) - 45x = 0 \rightarrow M = -\frac{5x^3}{3} + 45x - 90$$

اگر $x=0 \rightarrow M = -90$

اگر $x=3 \rightarrow M = 0$

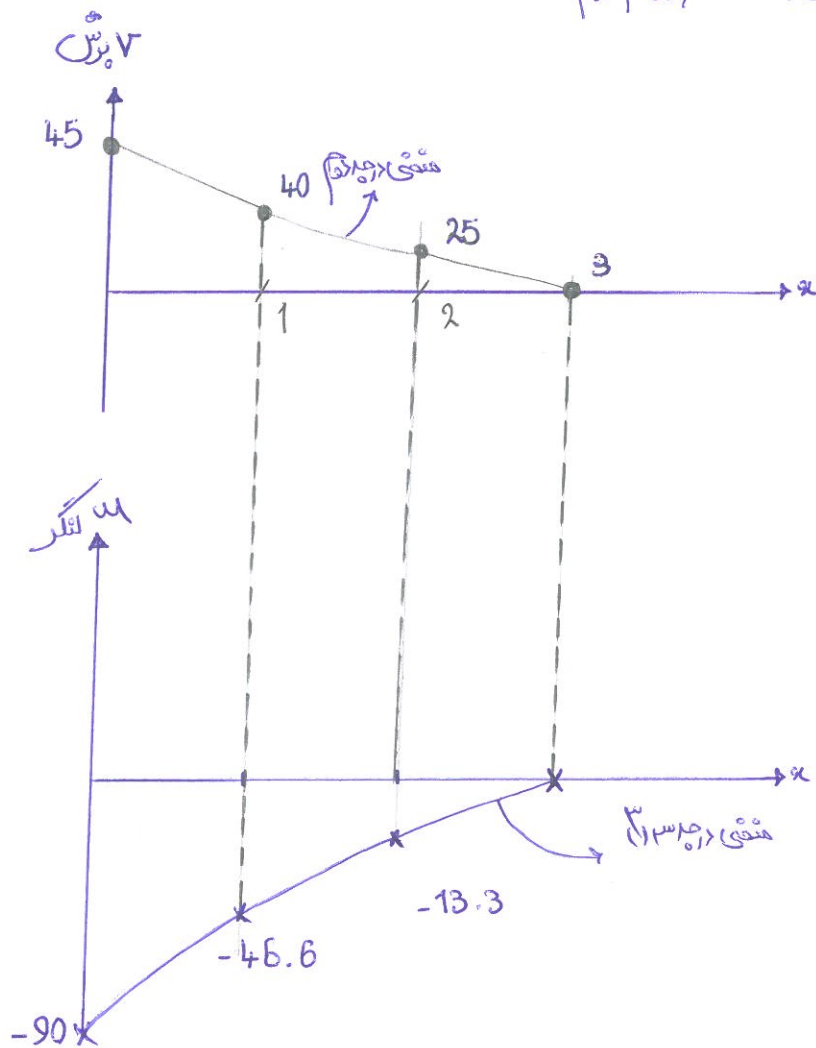
اگر $x=1 \rightarrow M = -46.5$

اگر $x=2 \rightarrow M = -13.3$

$$M' = V$$

انتقال درستی کاره

حالاتی که می‌توانیم نمودارهای پدیش و لنکر را رسم کنیم.



تفلیس به محله دانشجویان

* دیاگرام نیروی برشی و گشتاورهای شکل زیر را رسم کنید.

