



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

دخترانه اهواز

جزوه فیزیک مکانیک

گردآورنده و تنظیم:

ندا منحوش

فصل اول: بردارها

کمیت: هر آنچه که قابل اندازه گیری است را کمیت می نامیم. مانند: طول، جرم، زمان و
کمیت های فیزیکی را می توان به دو دسته تقسیم می شوند: اسکالر (نرده ای) و برداری

کمیت های اسکالر (نرده ای): کمیت هایی که فقط مقدار دارند مانند: جرم، زمان، چگالی، بار الکتریکی و ...

کمیت های برداری: کمیت هایی هستند که علاوه بر مقدار، جهت نیز دارند. مانند: سرعت، شتاب، جابجایی و ...

کمیت برداری را با گذاشتن پیکان در بالای نماد آن، $\vec{A}$ ، مشخص می کنیم. و اندازه بردار $\vec{A}$ را با $|\vec{A}|$ یا به سادگی با A نشان می -
دهیم.

بردار: بردار را به صورت یک پاره خط جهت دار نشان می دهیم و طول پاره خط با اندازه بردار متناسب است.
مشخصات بردار:

۱- نقطه اثر بردار (ابتدای بردار)

۲- راستا (امتداد)

۳- جهت بردار (جهت پیکان)

۴- اندازه (طول بردار)

۱- اگر بردار را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، فقط اندازه بردار تغییر می کند.



۲- اگر بردار را در یک عدد منفی ضرب کنیم، جهت آن عکس می شود.



۳- قرینه بردار: اگر برداری را در ۱- ضرب کنیم، قرینه بردار بدست می آید.



بردار $-\vec{A}$ قرینه بردار $\vec{A}$ است.

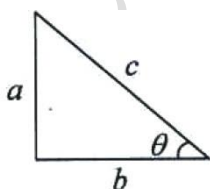
یاآوری ریاضی

قضیه فیثاغورث: در یک مثلث قائم الزاویه، توان دوم وتر برابر است با مجموع توان دوم

$$c^2 = a^2 + b^2$$

دو ضلع دیگر

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



چارچوب و دستگاه مختصات

برای توصیف مکان یک نقطه در فضا از دستگاه مختصات استفاده می کنیم.

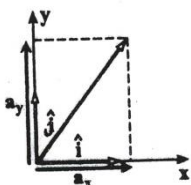
دستگاه مختصات دوبعدی از دو محور عمود برهم ساخته شده است. محل تلاقی دو محور عمودی و افقی را مبدأ مختصات می نامیم. هر دو محور افقی و عمودی از دو طرف مبدأ مانند محور اعداد صحیح با اعداد مثبت و منفی علامت گذاری می شود.

محور افقی را (x) و محور عمودی را (y) می‌نامیم. مکان (مختصات) یک نقطه را نیز با دو عدد x و y به صورت (x,y) نشان می‌دهیم.

دستگاه مختصات سه بعدی از سه محور عمود برهم (x,y,z) ساخته شده است.

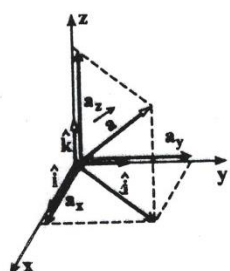
بردارهای یکه: برداری است که طول آن واحد (یک) است و جهت خاصی را نشان می‌دهد. بر طبق قرارداد، $\hat{i}$ بردار یکه در جهت مثبت محور x، $\hat{j}$ بردار یکه در جهت مثبت y، $\hat{k}$ بردار یکه در جهت مثبت محور z است. می‌توان $\vec{a}$ را بر حسب بردارهای یکه در دستگاه دو بعدی و سه بعدی به صورت زیر نوشت:

دستگاه مختصات دوبعدی دکارتی



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

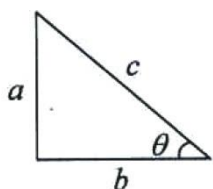
دستگاه مختصات سه بعدی دکارتی



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

توابع مثلثاتی:

در مثلث قائم الزاویه:



$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

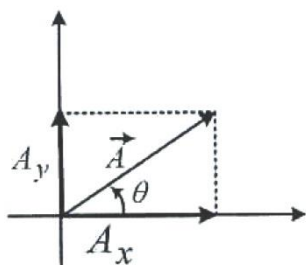
$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{ضلع مجاور به زاویه } \theta} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{ضلع مقابل به زاویه } \theta} = \frac{b}{a}$$

مؤلفه‌های یک بردار:

θ زاویه بردار با محور x ها



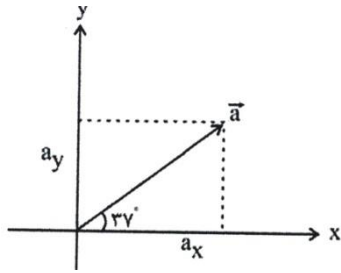
در دستگاه مختصات دو بعدی هر بردار دو مؤلفه دارد. A_x مؤلفه x بردار $\vec{A}$ ، A_y مؤلفه y بردار $\vec{A}$

به دست آوردن اندازه بردار با استفاده از مؤلفه‌های آن:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

طبق قضیه فیثاغورث:

تمرین ۱) بردار $\vec{a}$ به بزرگی ۲۰۰ واحد را که با محور x زاویه 37° می سازد، در نظر بگیرید. مؤلفه های x و y آن را بدست آورید.



$$a_x = a \cos 37^\circ = 200 \times 0.8 = 160$$

$$a_y = a \sin 37^\circ = 200 \times 0.6 = 120$$

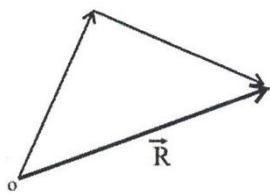
تمرین ۲) اگر مؤلفه افقی بردار $\vec{A}$ برابر ۳ و مؤلفه عمودی آن برابر ۴ باشد. اندازه بردار $\vec{A}$ را بدست آورید.

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

جمع برداری:

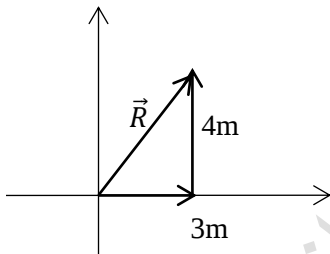
۱- روش هندسی

در این روش ابتدا یکی از بردارها را رسم می کنیم و بعد بردار دیگر را طوری رسم می کنیم که انتهای بردار اول بر ابتدای بردار دوم منطبق باشد. حال اگر ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل کنیم، بردار برآیند بدست می آید.



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

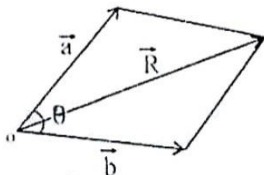
تمرین ۳) شخصی ۳ متر به طرف شرق و سپس ۴ متر به طرف شمال راه می رود. جابجایی کل آن چقدر است؟



$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

۲- روش متوازی الاضلاع:

در این روش دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را از یک نقطه رسم می کنیم، از انتهای بردار $\vec{a}$ خطی موازی بردار دومی و از انتهای بردار $\vec{b}$ نیز خطی موازی بردار اولی رسم می کنیم تا متوازی الاضلاعی مطابق شکل به وجود آید. قطری که از ابتدای دو بردار می گذرد، بردار برآیند دو بردار است.

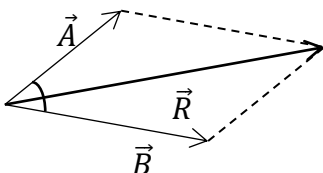


$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

اندازه بردار برآیند را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$R = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \quad \theta \text{ زاویه بین دو بردار}$$

تمرین ۴) دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با اندازه ای به ترتیب ۶ و ۴ مطابق شکل با یکدیگر زاویه 37° می سازند. اندازه و جهت بردار برآیند را بدست آورید.



$$R = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2 \times 4 \times 6 \times \cos 37^\circ} = \sqrt{16 + 36 + 24} = \sqrt{76} = 9.5$$

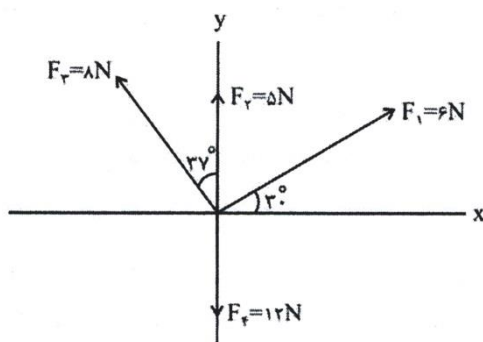
۳- تجزیه بردار:

- ۱- دستگاه مختصات مناسبی رسم می کنیم.
- ۲- بردارها را در دستگاه مختصات رسم می کنیم.
- ۳- مؤلفه های هر بردار را به دست می آوریم.
- ۴- جمع مؤلفه های x برابر مؤلفه x بردار برآیند و جمع مؤلفه های y برابر مؤلفه y بردار برآیند می باشد.
- ۵- با استفاده از رابطه زیر بزرگی بردار برآیند را بدست می آوریم:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

۶- با استفاده از رابطه $\tan \theta = \frac{R_x}{R_y}$ ، زاویه بردار برآیند (θ) با محور x ها را تعیین می کنیم.

تمرین ۵) در شکل مقابل برآیند چهار بردار نشان داده شده را بدست آورید.



$$F_{1x} = F_1 \cos 37^\circ = 6 \times 0.8 = 4.8$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 37^\circ = 6 \times 0.6 = 3.6$$

$$F_{2x} = 0$$

$$F_{2y} = 5$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 53^\circ = 8 \times 0.6 = 4.8$$

$$F_{3y} = F_3 \sin 53^\circ = 8 \times 0.8 = -6.4$$

$$F_{4x} = 0$$

$$F_{4y} = -12$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$R_x = 4.8 + 0 + (-6.4) + 0$$

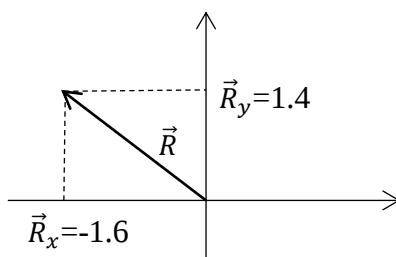
$$R_x = -1.6$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

$$R_y = 3.6 + 5 + 4.8 + (-12)$$

$$R_y = 1.4$$

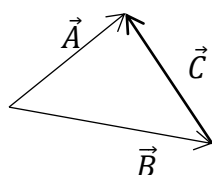
$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1.6^2 + 1.4^2} = \sqrt{2.56 + 1.96} = 2.1$$



جهت بردار برآیند به صورت:

تفریق دو بردار:

دو بردار را از یک نقطه رسم می کنیم. برداری که انتهای بردار دوم را به انتهای بردار اول وصل می کند را بردار تفریق می نامیم.



$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

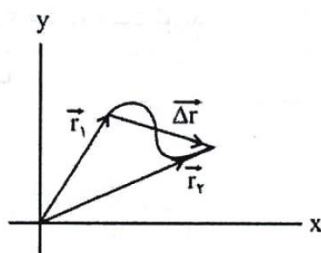
$$C = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

θ زاویه بین دو بردار

فصل سوم: سینماتیک (حرکت شناسی)

مکان، جابجایی و مسافت

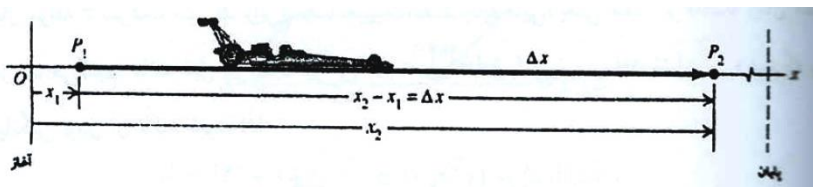
برداری مکان: برداری است که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن مکان ذره می باشد.
برداری جابجایی: برداری است که مکان اولیه ذره را به مکان نهایی آن وصل می کند.



مسافت: مسافت در واقع طول مسیر طی شده است و هر شکلی می تواند داشته باشد و کمیتی نرده ای است. مسیر حرکت لزوماً خط راست نیست و بردار جابجایی ممکن است بر مسیر حرکت منطبق نباشد و جابجایی کمیتی برداری است.

حرکت بر روی خط راست:

یکی از ساده ترین انواع حرکت است. فرض کنید اتومبیلی روی خط مستقیم در حرکت است. خط مسیر حرکت را محور X فرض می کنیم. در حرکت بر روی خط راست، مکان متحرک را با مختصه X که عددی مثبت یا منفی است، نشان می دهند.



سرعت متوسط:

سرعت متوسط را با نماد $\bar{v}$ نشان می دهند. وقتی ذره ای در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ از x_1 به x_2 رفته باشد، سرعت متوسط آن در طول این بازه زمانی، از تقسیم جابجایی Δx به بازه زمانی مربوط به این جابجایی یعنی Δt ، بدست می آید:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

واحد سرعت: متر بر ثانیه (m/s) یا کیلومتر بر ساعت (km/h)

اگر متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کند، سرعت آن مثبت و اگر در جهت منفی محور x حرکت کند، سرعت آن منفی می شود.

تمرین ۵) اگر متحرکی از مکان $x_1 = 100m$ به مکان $x_2 = 150m$ حرکت کند و این مسیر را در مدت 2 ثانیه برود. سرعت متوسط آن چقدر است؟

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{150 - 100}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m/s}$$

شتاب متوسط:

هنگامی که سرعت متحرک تغییر می کند (اندازه سرعت یا جهت حرکت) می گوئیم حرکت شتابدار یا غیریکنواخت است.
شتاب متوسط: نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی که سرعت تغییر رده است را شتاب متوسط می گوئیم. با $\bar{a}$ نشان می دهیم.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

تمرین ۶) سرعت متحرکی در لحظه $t_1 = 20s$ برابر 10 m/s و در لحظه $t_2 = 45s$ برابر 20 m/s است. شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه چقدر است؟

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{20 - 10}{45 - 20} = \frac{10}{25} = 0.4 \text{ m/s}^2$$

معادله حرکت (معادله مکان - زمان):

معادله ای است که مکان جسم را در هر لحظه نشان می دهد یعنی اگر در این معادله به جای t ، زمان مورد نظر را قرار دهیم، مکان متحرک در آن زمان بدست می آید.

تمرین ۶) معادله حرکت متحرکی به صورت $x = t^2 + 2t + 5$ می باشد. مکان متحرک در لحظه $t = 0$ و $t = 2s$ را بدست آورید.

$$t = 0 \rightarrow x_0 = 0 + 0 + 5 = 5m \quad \text{مکان در شروع حرکت (} t = 0 \text{)}$$

$$t = 2s \rightarrow x = 4 + 4 + 5 = 13m \quad \text{مکان در لحظه (} t = 2s \text{)}$$

اگر جابجایی متحرک در یک بازه زمانی مانند t_1 تا t_2 را بخواهیم از روی معادله مکان - زمان بدست آوریم باید مقادیر t_1 و t_2 را در معادله قرار دهیم تا x_1 و x_2 بدست آیند. آنگاه $x_2 - x_1$ برابر جابجایی متحرک است.

سرعت لحظه ای:

سرعت یک جسم در هر لحظه از حرکت، سرعت لحظه ای می گوئیم. (v)
سرعت لحظه ای از مشتق معادله مکان (x) نسبت به زمان t بدست می آید.

اگر از معادله حرکت مشتق بگیریم، معادله سرعت بدست می آید. و سپس در معادله سرعت، زمان مورد نظر را قرار دهیم، سرعت متحرک در آن لحظه بدست می آید.

شتاب لحظه ای:

شتاب متحرک در یک زمان مشخص را شتاب لحظه ای می گوئیم و با a نشان می دهیم.
شتاب لحظه ای از مشتق سرعت نسبت به زمان بدست آورید.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

تمرین ۷) معادله حرکت ذره ای بر روی محور x به صورت $x=2t^3-3t^2$ می باشد.

الف) سرعت و شتاب آن در لحظه $t=0$ و $t=2s$ بدست آورید.

ب) سرعت و شتاب متوسط آن را در این بازه زمانی بدست آورید.

الف)

$$V = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t$$

$$V_{(0)} = 0 \text{ s}$$

$$V_{(2)} = 6(2)^2 - 6(2) = 24 - 12 = 12 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

$$a_{(0)} = -6 \text{ m/s}^2$$

$$a_{(2)} = 12(2) - 6 = 18 \text{ m/s}^2$$

ب)

$$x_{(0)} = 0 \text{ m}$$

$$x_{(2)} = 2(2)^3 - 3(2)^2 = 16 - 12 = 4 \text{ m}$$

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4-0}{2-0} = 2 \text{ m/s}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{12-0}{2-0} = 6 \text{ m/s}^2$$

حرکت یکنواخت بر روی خط راست:

هرگاه سرعت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می کند، در تمام لحظه ها یکسان باشد، یعنی با سرعت ثابتی حرکت کند، حرکت آن را یکنواخت می نامیم. معادله این حرکت در امتداد محور x به این صورت است:

$$x = vt + x_0$$

در این رابطه v سرعت، x_0 فاصله جسم از مبدأ در لحظه $t=0$ و x فاصله جسم از مبدأ در لحظه t می باشد.

در حرکت یکنواخت، شتاب حرکت صفر است. همچنین در حرکت یکنواخت سرعت لحظه ای و سرعت توسط برابر است.

تمرین ۸) متحرکی در لحظه $t=0$ در مکان $x_0=2m$ و با سرعت ثابت $5m/s$ حرکت می کند. معادله حرکت آن را بنویسید.

$$x=5t+2$$

حل:

تمرین ۹) نوار نقاله ای با سرعت ثابت 10 m/s در حال حرکت است. اگر مکان اولیه آن $x_0=0$ باشد.

الف) معادله حرکت نوار نقاله را بنویسید.

ب) جسمی را روی آن قرار می دهیم بعد از ۵ ثانیه در چه مکانی قرار دارد؟

ج) اگر طول نوار نقاله برابر $150m$ باشد، چقدر طول می کشد تا جسم به انتهای آن برسد؟

$$x=Vt+x_0$$

$$x=10t$$

حل: الف)

$$t=4s \rightarrow x=10 \times 4 = 40 \text{ m}$$

ب)

$$x=10t \quad 150=10t \rightarrow t=15s$$

ج)

حرکت با شتاب ثابت روی محور xها

در حرکت با شتاب ثابت، شتاب متحرک در طول مسیر ثابت است و در نتیجه شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای باهم برابر هستند.
در حرکت با شتاب ثابت معادلات حرکت به صورت زیر هستند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \text{معادله حرکت}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \text{جابجایی}$$

$$v = at + v_0 \quad \text{معادله سرعت}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad \text{معادله مستقل از زمان}$$

که در این عبارتها v_0 سرعت اولیه، x_0 مکان اولیه می باشند.

تمرین ۱۰) اتومبیلی با شتاب ثابت 4 m/s^2 از حال سکون به راه می افتد. بعد از گذشت مدت زمان ۱۰ ثانیه چه سرعتی پیدا می کند؟ (ب) جابجایی اتومبیل در این مدت چقدر بوده است؟

$$a = 4 \text{ m/s}^2 \quad \text{(الف)}$$

$$V_0 = 0 \quad V = at + V_0$$

$$t = 10 \text{ s} \quad V = 4 \times 10 + 0 = 40 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = ? \quad \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t = \frac{1}{2} \times 4 \times 100 + 0 \times 10 = 200 \text{ m} \quad \text{(ب)}$$

حرکت با شتاب ثابت در راستای محور yها

الف) سقوط آزاد: در این حرکت جسمی از ارتفاع مشخص بالای سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می شود. اگر از مقاومت هوا صرف نظر کنیم، اجسام در مجاورت سطح زمین با شتاب (تقریباً) ثابت 9.8 m/s^2 به طرف زمین سقوط می کند. این شتاب را شتاب گرانش زمین می گویند.

معادلات این حرکت نیز همان معادلات حرکت با شتاب ثابت است. اگر جهت قائم رو به پایین را مثبت در نظر بگیریم، y_0 نقطه رها شدن و y فاصله گلوله از نقطه پرتاب :

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

$$v = gt + v_0$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y$$

(ب) پرتاب در راستای قائم به طرف بالا:

هنگامی که پرتابه را در راستای قائم با سرعت مشخصی به طرف بالا پرتاب می کنیم، این جسم پس از گذشت مدت مشخصی در حداکثر ارتفاع خود قرار می گیرد، این حرکت شتابدار و کندشونده می باشد. شتاب حرکت برابر شتاب گرانش زمین است. اگر جهت مثبت y را رو به بالا بگیریم، نقطه پرتاب را y_0 در نظر بگیریم، معادلات این حرکت به صورت زیر هستند:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$v = -gt + v_0$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$$

حرکت دو بعدی (حرکت در صفحه)

در حرکت دو بعدی بردار مکان دارای دو مختصه x و y است.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{بردار جابجایی } \vec{\Delta r}:$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad \text{و} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{بردار سرعت } \vec{v}:$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \quad \text{و} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{بردار شتاب } \vec{a}:$$

تمرین (۱۱) یک سنگ کوچک از ارتفاع ۴/۹ متری رها می شود. الف) پس از چند ثانیه به زمین می رسد؟ ب) سرعت آن هنگام رسیدن به زمین چقدر است؟

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t \quad \text{الف) چون سنگ رها شده پس } v_0=0$$

$$4.9 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 = 1 \quad \rightarrow \quad t = 1$$

$$v = gt + v_0 \quad \rightarrow \quad v = 9.8 \times 1 + 0 = 9.8 \text{ m/s} \quad \text{ب) سرعت هنگام رسیدن به زمین:}$$

تمرین (۱۲) گلوله ای در شرایط خلاء با سرعت اولیه ۲۰ m/s در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می شود. الف) در چه فاصله ای از نقطه اوج سرعت آن با ۱۰ m/s می رسد؟ ب) چقدر طول می کشد که سنگ به بالاترین نقطه برسد؟ ($g \cong 10$)

الف) ابتدا معادله حرکت سقوطی آزاد را می نویسیم:

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

$$100 - 400 = -2(10)(y - 0) \Rightarrow y = 15 \text{ m}$$

ارتفاع اوج برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = -2(10)(H - 0)$$

$$0 - (20)^2 = -20H \Rightarrow H = 20 \text{ m}$$

فاصله نقطه موردنظر تا نقطه اوج برابر است با:

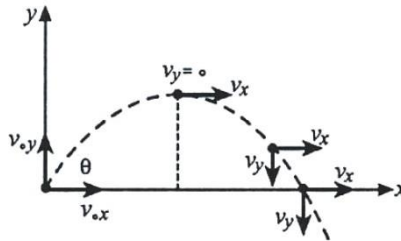
$$\Delta y = 20 - 15 = 5 \text{ m}$$

$$V = -gt + v_0 \quad \rightarrow \quad 0 = -10t + 20 \quad \rightarrow \quad t = 2 \quad \text{ب) در بالاترین نقطه سرعت گلوله صفر می شود } v = 0:$$

حرکت پرتابی: حرکت پرتابی، حرکتی با شتاب ثابت در صفحه است.

هرگاه جسمی با زاویه α نسبت به افق پرتاب شود، حرکت آن را حرکت پرتابی و جسم را پرتابه می نامیم.

کلید بررسی حرکت پرتابی این است که می توانیم حرکت در انتداد محورهای قائم و افق را جدا از یکدیگر بررسی کنیم. پس حرکت پرتابی را می توان ترکیبی از دو حرکت دانست: یکی حرکت افقی با سرعت ثابت و دیگری حرکت قائم با شتاب ثابت (g).



بررسی حرکت در راستای افقی: مؤلفه x شتاب صفر است و حرکت با سرعت ثابت v_{0x} است.

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos \theta$$

بررسی حرکت در راستای قائم: مؤلفه y شتاب برابر g است.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t$$

$$v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \theta$$

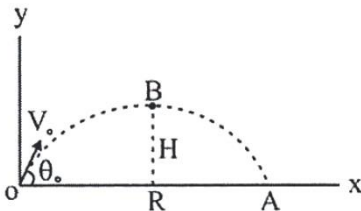
اگر سرعت اولیه برابر v_0 ، مؤلفه های سرعت در لحظه $t=0$ برابر

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

زمان اوج و ارتفاع اوج در حرکت پرتابی به سمت بالا با زاویه θ نسبت به افق به ترتیب

برابر:



$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

برد افقی پرتابه ای که به سمت بالا پرتاب می شود برابر است با مسافتی که پرتابه در راستای افق هم سطح با نقطه پرتاب طی می کند:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

تمرین (۱۲) جسمی با سرعت اولیه 30 m/s با زاویه 37° نسبت به افق از سطح زمین پرتاب می کنیم.

الف) جسم تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

ب) زمان رسیدن جسم به بالاترین ارتفاع ؟ (ج) طول برد افقی آن را بدست آورید.

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{(30)^2 (\sin 37)^2}{(2)(9/8)} = 16/6 \text{ m}$$

الف) ارتفاع اوج:

$$t_h = \frac{V_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{(30)(\sin 37)}{(9/8)} = 1/84 \text{ s}$$

ب) زمان اوج:

ج) طول برد افقی:

$$R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(30)^2 (\sin 74)}{(9/8)} = 88/3 \text{ m}$$

تمرین ۱۳) از تویی که در ارتفاع ۴۴ متری از زمین قرار دارد، پرتابه ای به سرعت ۲۴۰ m/s در راستای افقی شلیک می شود. الف) این پرتابه چه مدت در هوا می ماند؟ ب) در چه فاصله افقی با زمین برخورد می کند؟

الف) اگر t مدت زمان پرواز گلوله باشد:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

$$0 = -\frac{1}{2}(4/9)t^2 + 44 \Rightarrow t = 36$$

ب) برد گلوله برابر است با:

$$R = V_x t = (240)(36) \Rightarrow R = 8640 \text{ m}$$

فصل چهارم: دینامیک

هنگامی که جسمی را جابجا می کنید به آن نیرو وارد می کنید، نیرو عامل حرکت، کشش و رانش اجسام است و کمیت یبرداری است. نیرو را با F نشان می دهند و یکان آن در SI، نیوتن (N) است.

قوانین نیوتن: با استفاده از قوانین نیوتن می توان حرکت اجسام را توضیح داد.

قانون اول نیوتن:

اگر به جسمی نیرویی وارد نشود و یا برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد، اگر جسم ساکن باشد، به حالت سکون باقی خواهد ماند و اگر در حای حرکت باشد، به حرکت یکنواخت خود روی خط راست ادامه می دهد.

در این قانون تفاوتی بین جسم ساکن و جسمی که با سرعت ثابت حرکت می کند وجود ندارد.

لختی: تمایل جسم به حفظ حالت قبلی خود را لختی می نامیم.

قانون دوم نیوتن: بر طبق این قانون، اگر به جسمی نیرویی وارد شود، شتابی می گیرد که با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$

این رابطه برداری را می توان به سه رابطه اسکالری (رابطه مؤلفه ها) تبدیل کرد:

نکته: شتاب جسم در جهت برآیند نیروهای وارد بر جسم است.

قانون سوم نیوتن: طبق این قانون، اگر جسم A به جسم B نیرویی وارد کند، جسم B نیز همان نیرو را در جهت مخالف به A وارد می کند.

انواع نیروها:

۱- **نیروی گرانش:** هر دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 که به فاصله r از یکدیگر قرار دارند،

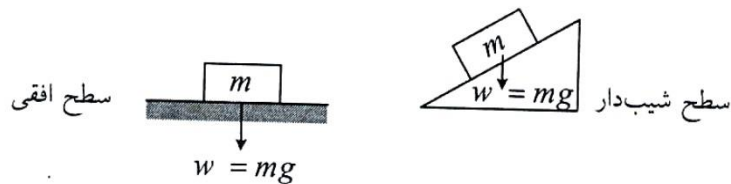
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

برهم نیروی جاذبه ای وارد می کنند به طوریکه:

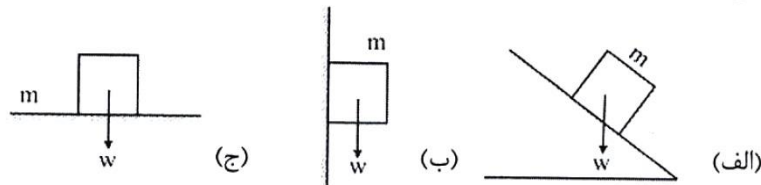
در رابطه G ثابتی است که به آن ثابت عمومی گرانش می گویند و مقدار آن برابر

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

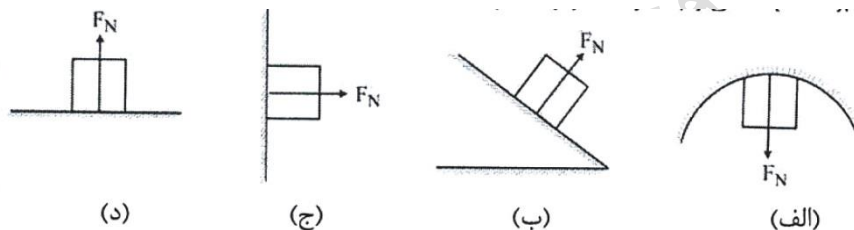
۲- **نیروی وزن:** نیروی جاذبه است که از طرف زمین به اجسام اطراف آن وارد می شود. $\vec{w} = m \cdot \vec{g}$



صرف نظر از طرز قرار گرفتن جسم روی سطح، نیروی وزن همواره در راستای قائم و رو به پایین است.



۳- **نیروی عمودی سطح:** نیرویی است که از طرف سطح به جسم وارد می شود و همواره عمود بر سطح تماس و به طرف خارج سطح است. نیروی عمودی سطح را با N یا F_N نشان می دهند.



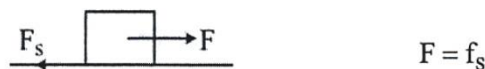
۴- **نیروی اصطکاک:**

این نیرو از نوع نیروهای مخالف حرکت است و به دو دسته کلی نیروی اصطکاک ایستایی f_s و نیروی اصطکاک جنبشی f_k تقسیم بندی می شود.

وقتی جسمی را روی سطح با نیروی F می کشیم و جسم حرکت نمی کند، نیرویی که از طرف سطح تماس به جسم وارد می شود نیروی اصطکاک است و چون جسم در حال سکون است به آن نیروی اصطکاک ایستایی می گوئیم.

$$f_{smax} = \mu_s N$$

که در این رابطه μ_s را ضریب اصطکاک ایستایی جسم می نامیم. کمیتی دون واحد است و به جنس سطوح در حال تماس و میزان زبری و نرمی آن بستگی دارد.



هنگامی که F زیاد شود و جسم شروع به لغزش روی سطح کند، نیروی اصطکاک را جنبشی می نامیم.

$$f_k = \mu_k N$$

$$f_k = \mu_k N \quad \Rightarrow \quad \mu_s > \mu_k \quad \text{به طور کلی} \quad f_s > f_k \quad \text{است} \quad f_s = \mu_s N$$

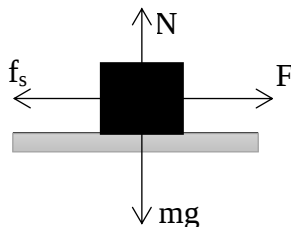
جهت نیروی اصطکاک معمولاً در خلاف جهت حرکت جسم است.

نکته: نیروی اصطکاک ایستایی مقدار ثابتی ندارد و بین صفر و مقدار بیشته f_{smax} تغییر می کند. هنگامی که جسم ساکن است با افزایش F ، نیروی اصطکاک ایستایی افزایش می یابد. زمانی که جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد، نیروی اصطکاک ایستایی مقدار بیشینه است.

تمرین ۱۴) چمدانی به جرم 20 kg روی سطح زمین در حال سکون است. ضریب اصطکاک ایستایی بین چمدان و زمین 0.3 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.2 است. ($g \approx 10$)

الف) حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن چمدان چقدر است؟

حل: برای به حرکت درآمدن چمدان $F \geq f_{smax}$



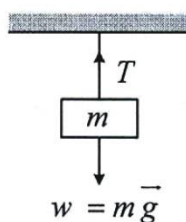
$$f_{smax} = \mu_s N, \quad N = mg \quad \rightarrow \quad f_{smax} = 0.3 \times 200 = 60 \text{ N}$$

ب) پس از به راه افتادن چمدان، اندازه نیروی اصطکاک جنبشی چقدر است؟

$$F_k = \mu_k N, \quad N = mg \quad \rightarrow \quad f_k = 0.2 \times 200 = 40 \text{ N}$$

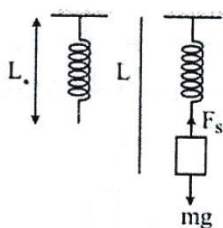
۵- نیروی کشش نخ:

فرض کنیم جسمی به جرم m را توسط طنابی از سقف آویزان کنیم. از طرف زمین نیروی وزن mg به جسم وارد می شود ولی جسم حرکت نمی کند، پس نیرویی اثر وزن را خنثی کرده است. این نیرو از طرف نخ به جسم وارد می شود که به آن نیروی کشش نخ می گوئیم و در راستای نخ است.



۶- نیروی فنر:

هنگامی که فنری کشیده و یا فشرده می شود، نیرویی که از طرف فنر به جسم وارد می شود را نیروی کشسانی فنر می نامیم و این نیرو با تغییر طول فنر متناسب است.



$$F_s = -K\Delta L, \quad \Delta L = L - L_0$$

علامت منفی نشان می دهد که نیروی فنر یک نیروی بازگرداننده است.

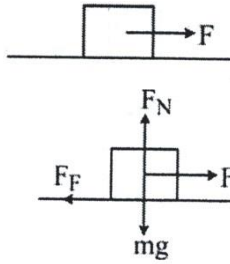
روش حل مسائل مربوط به دینامیک:

۱) ابتدا نیروهای خارجی وارد بر جسم را در یک دستگاه مختصات مناسب رسم می کنیم. به طوریکه ابتدای همه آنها در مبدأ باشد. این نمودار را اصطلاحاً نمودار جسم آزاد می نامیم.

۲) مؤلفه های این نیروها را در امتداد محور ها بدست می آوریم.

۳) حال قانون دوم نیوتن را به صورت مؤلفه ای در امتداد محورها می نویسیم. $\sum F_x$ برآیند مؤلفه نیروها روی محور x و $\sum F_y$ برآیند مؤلفه نیروها روی محور y است. A_x نیز مؤلفه شتاب در راستای محور x و a_y مؤلفه شتاب در راستای محور y است.

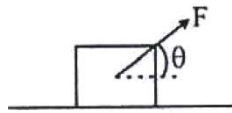
تمرین ۱۵) در شکل روبه رو نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنید.



حل: نیروهای وزن، عمودی سطح و اصطکاک علاوه بر نیروی F بر جسم وارد می شود

کاربردهای قوانین نیوتن:

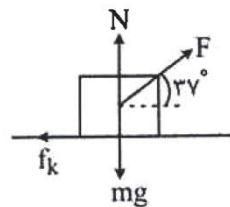
تمرین ۱۶) حرکت بر روی سطح افقی با اصطکاک: در شکل زیر اگر شتاب جسم $a = 2 \text{ m/s}^2$ و $\mu_k = 0.2$ باشد، نیروی F چقدر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



$$\theta = 37^\circ, \quad m = 4 \text{ kg}$$

حل:

نیروهایی را که بر جسم وارد می شود نشان می دهیم.



در جهت افقی داریم:

$$F \cos 37^\circ - f_k = ma \Rightarrow 0.8F - f_k = 8 \quad (1)$$

در جهت قائم داریم:

$$F \sin 37^\circ + N - mg = 0$$

$$0.6F + N - 40 = 0 \quad (2)$$

$$f_k = \mu_k N = 0.2N \quad (3)$$

رابطه (۳) را در (۱) قرار می دهیم.

$$0.8F - 0.2N = 8$$

$$0.6F + N = 40 \Rightarrow N = 40 - 0.6F$$

$$0.8F - 0.2(40 - 0.6F) = 8$$

$$0.8F - 8 + 0.12F = 8 \Rightarrow F = 17/4 \text{ N}$$

تمرین ۱۷) حرکت جسم روی سطح شیبدار با اصطکاک با سرعت ثابت

ذره ای به جرم $m = 10 \text{ kg}$ روی سطح شیبداری به زاویه شیب 30 درجه قرار دارد و با سرعت ثابت به پایین می لغزد. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح را بدست آورید. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

نکته: در مسائل سطح شیبدار، جهت مثبت حرکت در جهت حرکت ذره در نظر گرفته می شود.

$$\Sigma F_x = mg \sin \theta + (-\mu_k N) = mg \sin \theta - \mu_k N = 0$$

برآیند نیروها در راستای x:

$$\Sigma F_y = N - (mg \cos \theta) = 0$$

برآیند نیروها در راستای y:

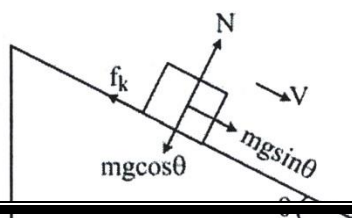
$$N = mg \cos \theta = (10)(10) \cos 30^\circ = 86.6 \text{ N}$$

نیروی عمودی سطح (N):

$$mg \sin \theta - f_k = ma = 0$$

$$(10)(10) \sin 30^\circ = \mu_k N = \mu_k 86.6$$

$$\mu_k = 0.58$$



تمرین ۱۸) شتاب جسم روی سطح شیبدار با اصطکاک:

کودکی به جرم ۲۰ کیلوگرم روی سرسره ای با زاویه $\theta = 37^\circ$ پایین می آید. اگر ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = 0.2$ باشد. شتاب حرکت کودک را بدست آورید.

$$\Sigma F_x = mg \sin \theta + (-f_k) = ma_x$$

برآیند نیروها در راستای x: (۱)

$$\Sigma F_y = N + (-mg \cos \theta) = 0$$

برآیند نیروها در راستای y: (۲)

$$N = mg \cos \theta$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$$

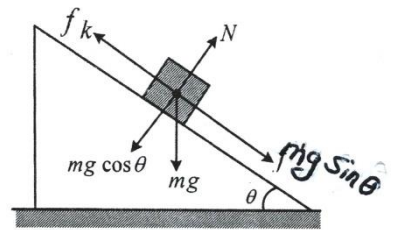
(۳)

$$mg \sin \theta + (-\mu_k mg \cos \theta) = ma_x$$

رابطه (۳) را در رابطه (۱) قرار می دهیم

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

$$a_x = 10(0.6 - 0.2 \times 0.8) = 4.4 \text{ m/s}^2$$



فصل پنجم: کار و انرژی

انرژی جنبشی: اگر جسمی به جرم m با سرعت v در حال حرکت باشد، انرژی جنبشی را با K نشان می دهند و برابر:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

یکای انرژی ژول (J) است.

تعریف کار:

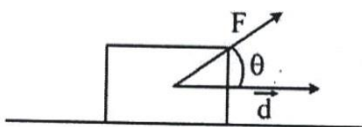
هرگاه به جسمی نیرویی وارد شود و آن را در امتدادی جابجا کند، می گوئیم نیرو بر روی جسم کار انجام داده است.

کار نیروی ثابت:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$$

اگر نیرو ثابت F به جسم وارد شود و به اندازه d جابجا شود، کار این نیرو برابر:

و θ زاویه بین جابجایی و نیرو است. واحد کار ژول است.



نکته: اگر چند نیرو بر جسم وارد شود، کار کل نیروها برابر با مجموع کار تک تک نیروها.

نکته: کار ممکن است مثبت باشد، در این صورت انرژی به جسم منتقل می شود. و اگر کار منفی باشد، انرژی از جسم به خارج منتقل می شود.

حالت های خاص:

$$W = Fd$$

اگر نیرو و جابجایی موازی و هم جهت باشند، $(\theta = 0)$ ،

$$W = -Fd$$

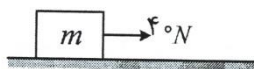
اگر نیرو و جابجایی هم راستا و در خلاف جهت یکدیگر باشند $(\theta = 180)$ ،

$$W = 0$$

اگر نیرو و جابجایی عمود بر هم باشند $(\theta = 90)$ ، کار صفر می شود.

در حرکت دورانی کار تمام نیروهایی که در راستای شعاع هستند، صفر می شود. زیرا جابجایی مماس بر دایره و نیرو شعاعی است. و این دو برهم عمود هستند.

تمرین ۱۹) ذره ای به جرم ۲ کیلوگرم توسط یک نیروی ۴۰N مطابق شکل بر روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۱ به اندازه ۱۰ متر در راستای x+ جابجا می شود. الف) کار نیروی F؟ ب) کار نیروی عمودی سطح؟ ج) کار نیروی وزن؟ د) کار نیروی اصطکاک؟ ه) کار کل نیروهای وارد بر جسم را بدست آورید



$$W_F = Fd \cos \theta$$

$$\Rightarrow W = (40) \times (10) \times \cos(0) = 400 \text{ J}$$

الف) کار نیروی F:

$$W_N = Nd \cos(90) = 0$$

ب) کار نیروی N:

$$W_{mg} = mgd \cos(90) = 0$$

ج) کار نیروی وزن (mg):

$$W_f = f_k d \cos(180) = -f_k d$$

د) کار نیروی اصطکاک:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg = \left(\frac{1}{10}\right)(20) = 2$$

$$\Rightarrow W_f = (2)(10)(-1) = -20 \text{ J}$$

$$W = 400 - 20 = 380 \text{ J}, W > 0$$

ه) کار کل:

قضیه کار و انرژی:

اگر برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر F باشد، کار این نیرو برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است.

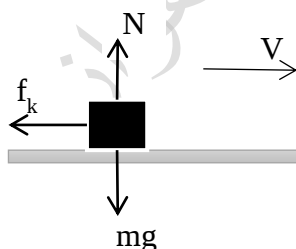
$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

۱- اگر کار کل مثبت باشد، انرژی جنبشی ذره افزایش یافته

۲- اگر کار کل منفی باشد، انرژی جنبشی ذره کاهش یافته

۳- اگر کار کل صفر باشد، انرژی جنبشی ذره ثابت می ماند.

تمرین ۲۰) خودرویی به جرم ۱۲۰۰ کیلوگرم با سرعت ۲۰m/s در حرکت است. اگر راننده ترمز کند، خودرو پس از طی مسافتی می ایستد. کار نیروی اصطکاک از لحظه ترمز تا توقف کامل چقدر است؟



$$W = W_f + W_N + W_{mg}$$

$$W_N = W_{mg} = 0$$

زیرا N و mg عمود بر جابجایی هستند:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 - \frac{1}{2} \times 1200 \times 400 = -240000 \text{ J}$$