

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جزوه ریاضی کاربردی

استاد: ملک خاں

رشته: کامپیوتر

## توابع چند متغیره

تاکنون توابعی که با آنها آشنا شده ایم دارای یک متغیره بوده اند. برای نمونه توابع زیر در نظر بگیرید.

$$f(x) = \frac{5x-7}{4} \quad \text{و} \quad f(x) = \sin x^2 + 5x$$

الان قصد داریم توابعی را معرفی کنیم که دارای 2 یا 3 متغیره و یا بیشتر هستند. فرم کلی یک تابع چند متغیره که دارای  $n$  متغیره است به صورت زیر است

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

به عنوان نمونه توابع چند متغیره زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = 5y - 3x^2y + 9$$

$$f(x, y) = 15x + 7y^2 - 3x^3y^6 \rightarrow \text{متغیره 2}$$

$$f(x, y, z) = 3\sin x^4 - 2ze^{3+y} + 2z^3 \rightarrow \text{متغیره 3}$$

مثال ۱۱  
برای تابع مقدار تابع را برای  $(2, 0)$  بدست آورید.

$$f(x, y) = 3x^2y^3 - 5x$$

$$f(2, 0) = 3(2)^2(0)^3 - 5(2) = 0 - 10 = -10$$

مثال ۱۲  
برای تابع زیر مقدار  $f(0, 1, -5)$  را بدست آورید.

$$f(x, y, z) = 7xy^2 - y^3z + \sin x$$

$$f(0, 1, -5) = 7(0)(1)^2 - (1)^3(-5) + \sin 0 = 0 - 5 + 0 = -5$$

(در مثال فوق به جای  $x=0$  و  $y=1$  و  $z=-5$  قرار دهیم)



خرد پیوستگی:

حد تابع دو متغیره  $f(x, y)$  در نقطه  $(a, b)$  به  $(x, y)$  نزدیک می شود برابر است با:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

(برای تعیین حد به جای  $x$ ،  $a$  قرار داد و به جای  $y$ ،  $b$  قرار می دهیم)

مثال ۱: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$(1) \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{3x - 5y}{xy} = \frac{3(1) - 5(2)}{(1)(2)} = \frac{3 - 10}{2} = \frac{-7}{2}$$

$$(2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, -3)} \frac{x^2 - 5xy + 7}{\cos xy} = \frac{0^2 - 5(0)(-3) + 7}{\cos(0)(-3)} = \frac{+7}{\cos 0} = \frac{7}{1}$$

پیوستگی:

تابع  $f(x, y)$  در نقطه  $(a, b)$  دارای حد است اگر و فقط اگر:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- (الف)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$  برای حد باشد
- (ب) مقدار حد با مقدار تابع برابر باشد.

مثال ۲: پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید

$$f(x, y) = 8xy - 4x^3y$$

$$f(1, 4) = 8(1)(4) - 4(1)^3(4) = 32 - 16 = 16$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 4)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 4)} 8xy - 4x^3y = 16$$

از آنجایی که مقدار حد و مقدار تابع برابر هستند تابع پیوسته است.



مثال ۱۱: بیوستگی تابع زیر (۰۰۰) برررسی کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{7xy^3 - 5x}{x - y + 4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{7xy^3 - 5x}{x - y + 4} = \frac{7(0)(0)^3 - 5(0)}{0 - 0 + 4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$f(0, 0) = 1$$

(از آنجا که حد تابع صفر و مقدار تابع یک است لذا بیوسته نیست)

مشتق جزئی: در تابع چند متغیره  $f(x, y, z)$  را در نظر بگیرید. مشتقات جزئی، مشتق نسبت به هر متغیری باشد

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \text{مشتق جزئی نسبت به } x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad \text{مشتق جزئی نسبت به } y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z \quad \text{مشتق جزئی نسبت به } z$$

نکته: در مشتق گیری نسبت به متغیره مثل  $x$ ، مابقی متغیره ثابت در نظر می گیریم. و همینطور مابقی متغیره ها نیز به همین صورت.

مثال ۱۲: مشتق جزئی را بدست آورید

$$f(x, y) = x^2 + 7y^4 - x^3y^2 + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 - (3x^2)y^2 + 0 \rightarrow \text{مشتق نسبت به } x \text{ (ثابت)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 28y^3 - x^3(2y) + 0 \rightarrow \text{مشتق نسبت به } y \text{ (ثابت)}$$



مثال: مشتقات جزئی را بدست آورید

$$f(x, y, z) = e^{2x} \sin y + 5x^3 z^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x} \sin y + 15x^2 z^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 20x^3 z^3$$

نکته: در مشتق گیری جزئی، هر چه نسبت به یک متغیر مثل  $x$  مشتق می‌گیریم، مابقی متغیرهای ثابت هستند که اگر آنها باشند مشتق آنها صفر است، اگر ضریب قرار گرفته باشند (ضریب بی‌اثر) ثابت نوشته می‌شوند.

مشتقات جزئی مرتبه بالاتر:  
اگر از مشتقات جزئی مرتبه اول، مجدداً مشتق گیری کنیم به آن مشتقات جزئی مرتبه دوم می‌گویند.  
که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f_{xx} \quad \text{دو بار نسبت به } x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy^2} = f_{yy} \quad \text{دو بار نسبت به } y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \quad \text{اول نسبت به } y \text{ و دوم نسبت به } x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \quad \text{اول نسبت به } x \text{ و دوم نسبت به } y$$



مثال ۱۱ مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم را بدست آورید

$$f(x, y) = x^3 \sin y + x^4 + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin y + 4x^3 \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x \sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3x^2 \cos y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos y + 3y^2 \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^3 \sin y + 6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3x^2 \cos y \end{aligned}$$

مثال ۱۲ مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم را بدست آورید

$$f(x, y) = e^{2x} \cos y + \ln xy$$

$$f_x = 2e^{2x} \cos y + \frac{y}{xy} \xrightarrow{\text{دوبار } x} f_{xx} = 4e^{2x} \cos y + \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{اول } x \text{ و } y} f_{xy} = 2e^{2x} (-\sin y)$$

$$f_y = e^{2x} (-\sin y) + \frac{x}{xy} \xrightarrow{\text{دوبار } y} f_{yy} = e^{2x} (-\cos y) + \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{اول } y \text{ و } x} f_{yx} = 2e^{2x} (-\sin y)$$

(مشتق  $\frac{1}{x}$  برابر  $-\frac{1}{x^2}$  است)



مشتق گیری ضمنی

برای تابع  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  مشتقات ضمنی رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = - \frac{F_{x_j}}{F_{x_i}} \rightarrow \text{مشتق نسبت به } x_i$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = - \frac{F_{x_j}}{F_{x_i}} \rightarrow \text{مشتق نسبت به } x_j$$

به عنوان مثال، برای  $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z}$$

مثال: برای تابع  $F(x, y, z) = x^2 + xy^3 - y^2z^3$  مشتق‌های ضمنی لفته شده رابطه زیر را دارند:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = ? , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? , \quad \frac{\partial y}{\partial z} = ? , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = ?$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{3xy^2 - 2yz^3}{2x + y^3} \rightarrow \text{مشتق نسبت به } y$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{3xy^2 - 2yz^3}{2x + y^3} \rightarrow \text{مشتق نسبت به } x$$

حل:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{2x + y^3}{3xy^2 - 2yz^3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{6yz^2}{3xy^2 - 2yz^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{3xy^2 - 2yz^3}{6yz^2}$$

مشتق گیری ضمنی

مثال: برای تابع زیر

$$F(x, y, z) = x^2 \sin(y^2) + z^3 e^{2x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{2x e^{2x}}{3z^2 e^{2x}}$$



گرادیان:

$F(x, y, z)$  را به صورت زیر تعریف کنیم.

گرادیان تابع

$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$$

اگر بردار سمت چپ تابع  $F(x, y, z)$  می باشد.

$P(1, 2, -1)$

مثلاً: گرادیان تابع  $F(x, y, z) = 3x^5 - 3x^3z^2 + 7y^2$  را در نقطه  $P$  محاسبه کنید.

$$\nabla F = (15x^4 - 6x^2z^2, 14y, 6x^3z)$$

آنون نقطه  $(1, 2, -1)$  را در تابع گرادیان قرار می دهیم.

مسئله سوئی:  $F(x, y, z)$  مسطح سوئی در جهت بردار  $\vec{u}$  برای تابع

$$D_{\vec{u}} F = \nabla F \cdot \vec{u}$$

مساوی است با

ضرب داخلی

یادآوری: ضرب داخلی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به صورت زیر بیان می کنیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثال: ضرب داخلی دو بردار زیر را بدست آورید.

$$\vec{a} = (3, 5, -4)$$

$$\vec{b} = (7, -1, 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 7 + 5 \times (-1) + (-4) \times 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 21 - 5 = 16$$

ضرب داخلی



مثال ۱۱: سطح موجی تابع  $P(x, y, z) = x^4 z^2 + 2y^3$  را در نقطه  $(1, 5, 2)$  در جهت بردار  $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$  به سمت او برید.  
ابتدا بردار  $\vec{u}$  را در نقطه  $(1, 5, 2)$  محاسبه می‌کنیم.

$$\nabla P = (P_x, P_y, P_z) = (4x^3 z^2, 6y^2, 2x^4 z)$$

$$\nabla P_{(1, 5, 2)} = (4(1)^3(2)^2, 6(5)^2, 2(1)^4(2)) = (16, 150, 4)$$

$$D_{\vec{u}} P = \nabla P \cdot \vec{u} = (16, 150, 4) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \Rightarrow$$

$$D_{\vec{u}} P = 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 150 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times 0 = 79\sqrt{2}$$

مقدار موجی

مثال ۱۲: فرض کنید  $f(x, y, z) = xyz \cos z$  سطح موجی را در نقطه  $(2, 1, 0)$  در جهت بردار  $\vec{u} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  به سمت او برید.

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (y \cos z, x \cos z, -xy \sin z)$$

$$\nabla f_{(2, 1, 0)} = (1 \times \cancel{\cos 0}, 2 \times \cancel{\cos 0}, -2 \times 1 \times \cancel{\sin 0}) = (1, 2, 0)$$

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$D_{\vec{u}} f = (1, 2, 0) \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2}) + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - 1 + 0 = -\frac{1}{2}$$



نکته: بردار گرادیان در نقطه  $P_0$  بردار عمود بر سطح  $F(x, y, z)$  در نقطه  $P_0$  است

معادله صفحه مماس بر تابع (دویمه)

برای تابع  $F(x, y, z)$  معادله صفحه مماس در نقطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  برابر است با:

$$\left( f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) \right)_{P_0} = 0$$

مثال: معادله صفحه مماس  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  در نقطه  $P_0(-1, 1, \sqrt{2})$

$$(f_x = 2x)_{P_0} \rightarrow f_x = 2(-1) = -2$$

$$(f_y = 2y)_{P_0} \rightarrow f_y = 2(1) = 2$$

$$(f_z = 2z)_{P_0} \rightarrow f_z = 2(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) = 0$$

$$-2(x-(-1)) + 2(y-1) + 2\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$$

$$\underline{-x + y + \sqrt{2}z = 4}$$

معادله صفحه

$$4x^2y + 2y^3 + 5xz^4 = 0 \text{ در نقطه}$$

مثال: معادله صفحه مماس

$$(f_x = 8xy + 5z^4)$$

$$(f_y = 4x^2 + 6y^2)$$

$$(f_z = 20xz^3)$$

$$P_0(1, -2, -1) \text{ بدست آورید}$$

$$P_0 = 8(1)(-2) + 5(-1)^4 = -16 + 5 = -11$$

$$P_0 = 4(1)^2 + 6(-2)^2 = 4 + 24 = 28$$

$$P_0 = 20(1)(-1)^3 = -20$$

$$f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) = 0$$

$$-11(x-1) + 28(y-(-2)) + 20(z-(-1)) = 0 \rightarrow -11x + 28y + 20z = -59$$



معادله خط قائم بر صفحه  $F(x, y, z)$  در نقطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  به صورت

معادله خط قائم بر صفحه  
زیر است:

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = \frac{z-z_0}{f_z}$$

$P_0(1, -1, 2)$  معادله صفحه  $3x^2 + y^2 + 2z = 12$

مثال معادله خط قائم بر صفحه  
به دست آورید.

$$(f_x = 6x)_{P_0} = (6(1)) = 6$$

$$(f_y = 2y)_{P_0} = 2(-1) = -2$$

$$(f_z = 2)_{P_0} = 2$$

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-(-1)}{2} = \frac{z-2}{2}$$

مثال برای تابع زیر، معادله صفحه مناسب، خط قائم را در نقطه  $P_0(2, 1, -1)$  معادله خط قائم بر صفحه  
معین کنید.

$$F(x, y, z) = 3xyz + e^{x-2}z^3$$

$$(f_x = 3yz + e^{x-2}z^3)_{P_0} = (3(1)(-1) + e^{2-2}(-1)^3) = -3 - 1 = -4$$

$$(f_y = 3xz)_{P_0} = 3(2)(-1) = -6$$

$$(f_z = 3xy + 3e^{x-2}z^2)_{P_0} = (3(2)(1) + 3e^{2-2}(-1)^2) = 6 + 3 = 9$$

$$e^0 = 1$$

معادله صفحه  $f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) = 0$

$$-4(x-2) - 6(y-1) + 9(z-(-1)) = 0 \rightarrow 2x + 6y + 9z = 1$$

معادله خط  $\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = \frac{z-z_0}{f_z} \rightarrow \boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+1}{9}}$



انستدال دوقانه:

انستدال دوكانه:

تابع  $f(x, y)$  را در نظر بگيريد. در اين صورت انستدال از اين تابع روی سطح به صورت زیر

تکریف می شود:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

که  $a \leq x \leq b$  و  $c \leq y \leq d$  تعریف می کنند.

برای محاسبه این انستدال (مسئله چیه) ابتدا نسبت به  $x$  از  $f(x, y)$  انستدال می گیریم و سپس از حاصل آن نسبت به  $y$  انستدال می گیریم.

**نکته:** زمانی که نسبت به  $x$  انستدال می گیریم،  $y$  ثابت است و به همین صورت زمانی که نسبت به  $y$  انستدال می گیریم،  $x$  ثابت است.

مثال: انستدال دوقانه زیر را بدست آورید.

$$\int_{-1}^2 \int_0^2 (2x^3 + 5y^2) dx dy = \int_{-1}^2 \left[ \int_0^2 (2x^3 + 5y^2) dx \right] dy = \left. \frac{2x^4}{4} - (15y^2)x \right|_0^2 =$$

$$\left. \frac{2}{4} (15y^2)2 - 0 \right] dy = \int_{-1}^2 [4 - 30y^2] dy = \left. 4y - \frac{30y^3}{3} \right|_{-1}^2 =$$

حالا نسبت به  $y$  انستدال می گیریم

به جای  $x$ ، صفر قرار دهیم به جای  $x$ ، 2 قرار دهیم

$$\left( 4(2) - \frac{30(2)^3}{3} \right) - \left( 4(-1) - \frac{30(-1)^3}{3} \right) = (8 - 80) - (-4 + 10) = -78$$

به جای  $y$ ، 1 - قرار دهیم به جای  $y$ ، 2 قرار دهیم

**نکته:** در محاسبه انستدال عین (انستدال که حد بالا و پایین داشته باشد) از قضیه زیر استفاده

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

حاصل انستدال

حد بالا

حد پایین



مثال ۱۱: مقدار دوگانه بدست آورید.

$$\int_{-2}^1 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx = \int_{-2}^1 \left[ \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy = x \cos y \Big|_0^{\pi/2} = x \cos \frac{\pi}{2} - x \cos 0 = -x \right] dx = \int_{-2}^1 -x \, dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = -\frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$$

یافتن ناحیه بین درستی از طریق مقدار دوگانه

برای یافتن ناحیه که نسبت به جی تابع  $f(x,y)=1$  و حدود ناحیه برای  $x$  و  $y$  قرار دهیم.

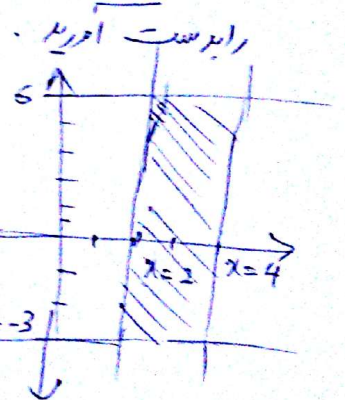
$$y=6, y=-3, x=4, x=2$$

مثال ۱۲: محدوده ناحیه محدود به منحنی

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \int_{-3}^6 \int_2^4 1 \, dx \, dy =$$

$$\int_{-3}^6 \left[ \int_2^4 1 \, dx = x \Big|_2^4 = 4-2=2 \right] dy \leftarrow$$

$$\int_{-3}^6 2 \, dy = 2y \Big|_{-3}^6 = 2(6) - 2(-3) = 12+6=18$$



مثال ۱۳: مقدار دوگانه بر روی ناحیه بدست آورید.

$$\int_{-1}^0 \int_2^{3x+4} (5x-y) \, dy \, dx = \int_{-1}^0 \left[ \int_2^{3x+4} (5x-y) \, dy = 5xy - \frac{y^2}{2} \Big|_2^{3x+4} \right] dx$$

$$= 5x(3x+4) - \frac{(3x+4)^2}{2} = 15x^2 + 20x - \left( \frac{9}{2}x^2 + 12x + 8 \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \frac{21}{2}x^2 - 8x - 8 \right) dx = \left( \frac{21}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x \right) \Big|_{-1}^0 = \left( 0 - \left( -\frac{7}{2} - 4 - 8 \right) \right) = 31$$



انتهای سه گانه:

برای تابع  $F(x, y, z)$ ، انتهای سه گانه را روی حجم مورد زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_c^d \int_a^b \int_e^f F(x, y) dx dy dz$$

برای تعیین انتهای سه گانه ابتدا انتهای درونی را نسبت به  $x$  و سپس از حاصل آن

نسبت به  $y$  و در آخر نسبت به  $z$  انتهای می‌گیریم.

همانند انتهای سه گانه، زمانی که نسبت به  $x$  انتهای می‌گیریم متغیرهای نسبت هستند و به همین صورت برای متغیر  $y$  و  $z$  همین قاعده برقرار است.

مثال ۱: حاصل انتهای را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \iiint x + y + z dx dy dz &= \int \int \left[ \int x + y + z dx \right] dy dz = \\ &= \int \int \left[ \frac{x^2}{2} + yx + zx \right] dy dz = \int \left[ \int \frac{x^2}{2} + yx + zx dy \right] dz = \\ &= \int \left[ \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}x + zxy \right] dz = \int \left[ \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}x + zxy \right] dz = \\ &= \frac{x^2}{2}yz + \frac{y^2}{2}xz + \frac{z^2}{2}xy \end{aligned}$$

مثال ۲: حاصل انتهای زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_0^1 x^2 y z dx dy dz &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \left[ \int_0^1 x^2 y z dx \right] dy dz = \int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \left[ \frac{x^3}{3} y z \right]_0^1 dy dz = \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{3} y z - 0 \right] dy dz = \int_{-1}^0 \left[ \int_{-1}^2 \frac{1}{3} y z dy \right] dz = \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{3} \frac{y^2}{2} z \right]_{-1}^2 dz = \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{2^2}{2} z - \frac{(-1)^2}{2} z \right) \right] dz = \\ &= \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} z \right) \right] dz = \frac{1}{6} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \left( \frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$



## معادلات دیفرانسیل

هر معادله به صورت  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  را یک معادله دیفرانسیل می‌گوئیم که شامل  $x$  و  $y$  و مشتقات  $y$  می‌باشد.

نیز ترتیب مرتبه مشتق  $y$  را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گوئیم.  
به عنوان مثال «معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید»

$$3x y' + 5x^2 \sin y + 2y'' = 0 \rightarrow \text{معادله دیفرانسیل مرتبه دوم}$$

$$7x \cos y \, dx + 5y^2 x^2 \, dy = 0 \rightarrow \text{معادله دیفرانسیل مرتبه اول}$$

$$2x^2 \, d^2x + 5y^3 \cos xy \, d^2y = 0 \quad \left( y = \frac{dy}{dx} \right) \text{ در اینجا که}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

**هدف حل معادله دیفرانسیل:** هدف از حل معادله دیفرانسیل یافتن  $y$  است که در معادله صدق می‌کند. به آن جواب معادله دیفرانسیل می‌گوئیم.

مثال «معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید»

$$y' - \sin x = 0 \rightarrow y' = \sin x \rightarrow \text{باز یافتن } y \text{ از طریق انتگرال}$$

$$\int y' \, dx = \int \sin x \, dx$$

$$\boxed{y = -\cos x + C}$$

(انتگرال  $y$  → مشتق و انتگرال می‌گیریم)  
(باید  $y$  است)  
جواب عمومی معادله

مثال «جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید»

$$\frac{dy}{dx} - \cos(x) - x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) + x^2 \rightarrow \text{انتگرال}$$

$$\int \frac{dy}{dx} \, dx = \int \cos x + x^2 \, dx \rightarrow \boxed{y = \sin x + \frac{x^3}{3} + C}$$

جواب عمومی



## حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول

معادله دیفرانسیل جدانشدگی

معادله دیفرانسیل به صورت

$$f(x) dx + g(y) dy = 0$$

را که  $x$  و  $y$  از هم جدا شده باشند، جداگانه می‌کنیم

حل معادله جدا شده می:

مبدأت  $f(x) dx$  در یک طرف و مبدأت  $g(y) dy$  در یک سمت معادله از طرفین انتگرال می‌گیریم و معادله را مرتب می‌کنیم تا جواب می‌شود است.

مثال ۱۱: جواب عمومی را بدست آورید

$$3x^2 + 5 dx - 7y^3 - 2y dy = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 5 dx = 7y^3 + 2y dy \rightarrow \text{از طرفین انتگرال}$$

$$\int 3x^2 + 5 dx = \int 7y^3 + 2y dy$$

انتگرال نسبت به  $x$

انتگرال نسبت به  $y$

$$\boxed{x^3 + 5x = \frac{7y^4}{4} + y^2 + C} \quad \text{جواب عمومی}$$

$$y' = e^{x+y}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \rightarrow dy = e^x (e^y) dx$$

$$\frac{1}{e^y} dy = e^x dx \rightarrow \int \frac{1}{e^y} dy = \int e^x dx$$

$$\rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$\rightarrow \boxed{-e^{-y} = e^x + C} \quad \text{جواب عمومی}$$



مثال جواب عمومی را بیست آورید

$$(1+x^2) = y' \left( \frac{1}{1+y^2} \right) \rightarrow (1+x^2) = \frac{dy}{dx} \left( \frac{1}{1+y^2} \right)$$

$$\underbrace{(1+x^2)}_x dx = \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_y dy \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int (1+x^2) dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= x + \frac{x^2}{2} = \tan^{-1} y + C$$

جواب عمومی  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$

مثال جواب عمومی را بیست آورید

$$\sin y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2 \rightarrow \sin y dy = e^x + x^2 dx$$

$$\int \sin y dy = \int e^x + x^2 dx \rightarrow -\cos y = e^x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$y' = \frac{x+3}{y-4} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+3}{y-4} \rightarrow$$

مثال جواب عمومی را بیست آورید

$$y-4 dy = x+3 dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{y^2}{2} - 4y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

جواب عمومی



## تبدیلات لاپلاس:

تابع  $f(x)$  را در نقطه  $x=0$  به  $F(s)$  تبدیل لاپلاس تابع  $f(x)$  به صورت زیر است

$$L(f(x)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

که آن را به  $F(s)$  نیز نشان می دهند.  
 لاپلاس تابع را به صورت فرمول بیان می کنیم.

## فرمول های لاپلاس:

$$L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$(n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1)$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad , \quad 3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$$

$$L(\sin ax) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$L(\cos ax) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$L(\sin hax) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$L(\cos hax) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$



مثال ۱۱ لابلاس توابع زیر را بدست آورید

$$L(x^5) = \frac{5!}{s^{5+1}} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{s^6}$$

$$L(x^3) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$L(\sin 3x) = \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$L(\cos 5x) = \frac{s}{s^2 + 5^2} = \frac{s}{s^2 + 25}$$

$$L(\sinh 6x) = \frac{6}{s^2 - 6^2} = \frac{6}{s^2 - 36}$$

$$L(\cosh 4x) = \frac{s}{s^2 - 4^2} = \frac{s}{s^2 - 16}$$

$$L(\sin 5x) = \frac{5}{s^2 + 25}$$

$$L(\sinh 4x) = \frac{4}{s^2 - 16}$$

$$L(e^{3x}) = \frac{1}{s-3}$$

$$L(\cos 7x) = \frac{s}{s^2 + 49}$$

$$L(\cosh 2x) = \frac{s}{s^2 - 4}$$

$$L(e^{-4x}) = \frac{1}{s-(-4)} = \frac{1}{s+4}$$