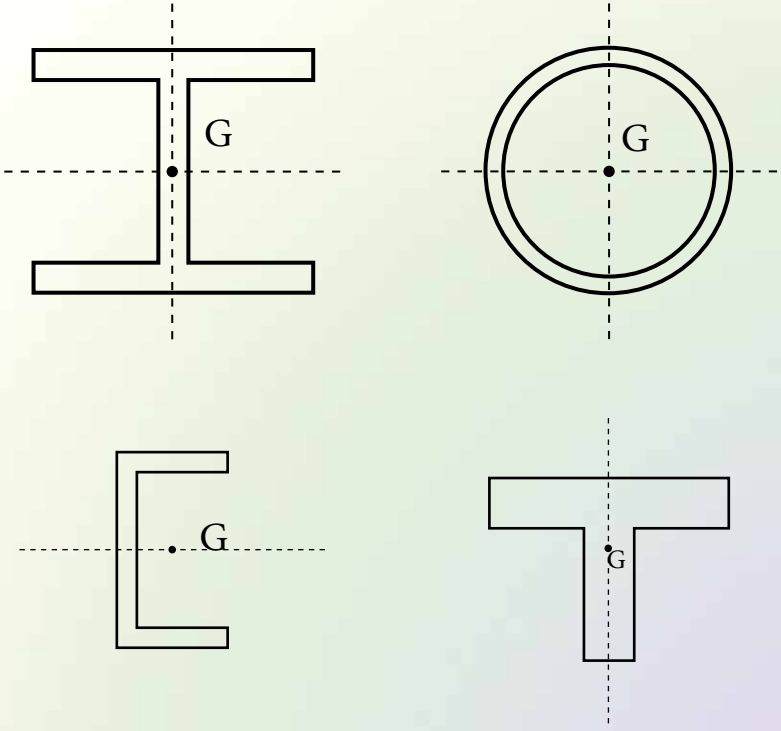
فصل ششم

خواص هندسی سطوح



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- خواص هندسی سطوح را بشناسد و نام ببرد.

۲- گشتاور اول سطح را تعریف نماید.

۳- مرکز سطح سطوح مختلف هندسی را به‌دست آورد.

۴- مختصات مرکز سطح سطوح متقارن را تعیین نماید.

۵- روابط مربوط به گشتاور دوم سطح را بشناسد و به‌کار گیرد.

۶- ممان اینرسی سطوح مرکب را محاسبه نماید.

۷- اساس مقطع سطوح مختلف را به‌دست آورد.

۸- مشخصات هندسی مقاطع نورد شده را از جدول استاندارد آن‌ها استخراج نماید.

مقدمه:

طول، سطح و حجم سه خصوصیت اصلی هندسی اجسام به‌شمار می‌روند. اجسام یک‌بعدی مانند طناب با طولشان، اجسام دو بعدی مانند یک قطعه زمین با مساحتشان و اجسام سه‌بعدی مثل یک ساختمان با حجمی که دارند مشخص می‌شوند.

این خصوصیات تمام ویژگی‌های اجسام را بیان نمی‌کنند؛ مثلاً دو قطعه زمین هم‌مساحت ممکن است دارای شکل‌های هندسی متفاوت باشند. بنابراین اجسام دارای خصوصیات دیگری نیز می‌باشند که در این فصل به بررسی بعضی از خصوصیات سطوح شامل گشتاور اول سطح، مرکز سطح، گشتاور دوم سطح و مدول مقطع یا اساس مقطع آن‌ها می‌پردازیم.

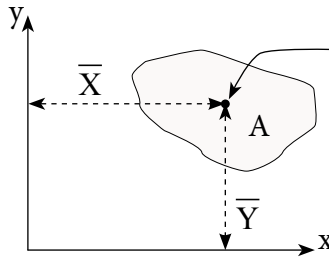
۶- ۱ گشتاور اول سطح (ممان استاتیک)

در فصل دوم با گشتاور نیرو آشنا شدیم که عبارت بود از حاصل‌ضرب نیرو در فاصلهٔ آن نیرو تا یک محور. گشتاور اول سطح نیز تعریفی مشابه گشتاور نیرو داشته و عبارت‌است از:

حاصل‌ضرب مساحت در فاصلهٔ مرکز آن تا محور مورد نظر.

گشتاور اول سطح با نماد Q نمایش داده می‌شود و واحد آن طول به توان ۳ می‌باشد یعنی m^3 و یا cm^3 و . . .

در شکل زیر با توجه به تعریف داریم:



شکل ۶-۱

گشتاور اول سطح **A** نسبت به محور **x**

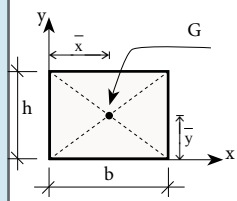
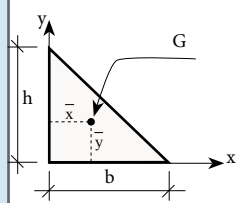
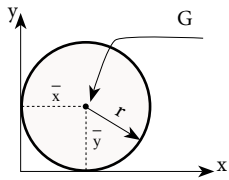
گشتاور اول سطح **A** نسبت به محور **y**

$$Q_x = A.\overline{Y} \qquad Q_y = A.\overline{X} \qquad (۱-۶)$$

در روابط فوق $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ مختصات مرکز سطح **A** می‌باشند.

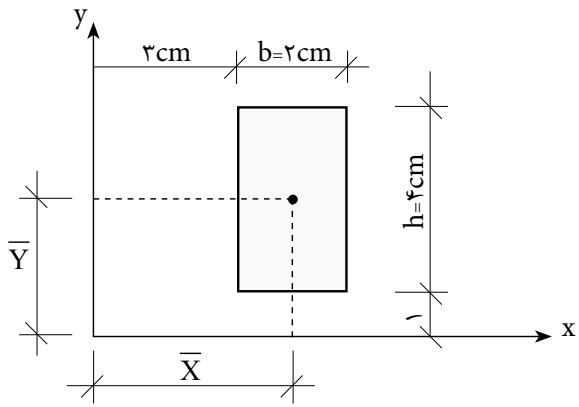
در جدول (۶-۱) مختصات مرکز سطح بعضی از سطوح هندسی نسبت به محورهای **x** و **y** آمده است.

جدول (۶-۱)

نام سطح	شکل هندسی	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	توضیحات
مستطیل (مربع)		$\frac{b}{۲}$	$\frac{h}{۲}$	مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می‌باشد
مثلث قائم‌الزاویه		$\frac{b}{۳}$	$\frac{h}{۳}$	مرکز سطح مثلث قائم‌الزاویه در فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ از قاعدهٔ آن می‌باشد
دایره		**r**	**r**	مرکز سطح دایره مرکز دایره می‌باشد

مثال ۱

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک) مستطیل را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



با توجه به شکل فاصله مرکز سطح از محورهای x و y عبارتند از:

$$\overline{X} = \frac{b}{۲} + ۳ \Rightarrow \overline{X} = \frac{۲}{۲} + ۳ = ۴cm$$

$$\overline{Y} = \frac{h}{۲} + ۱ \Rightarrow \overline{Y} = \frac{۴}{۲} + ۱ = ۳cm$$

$A = b.h = ۲ \times ۴ = ۸cm^۲$ مساحت مستطیل برابر است با

$Q_x = A.\overline{Y} \Rightarrow Q_x = ۸ \times ۳ = ۲۴cm^۳$ ممان استاتیک نسبت به محور x

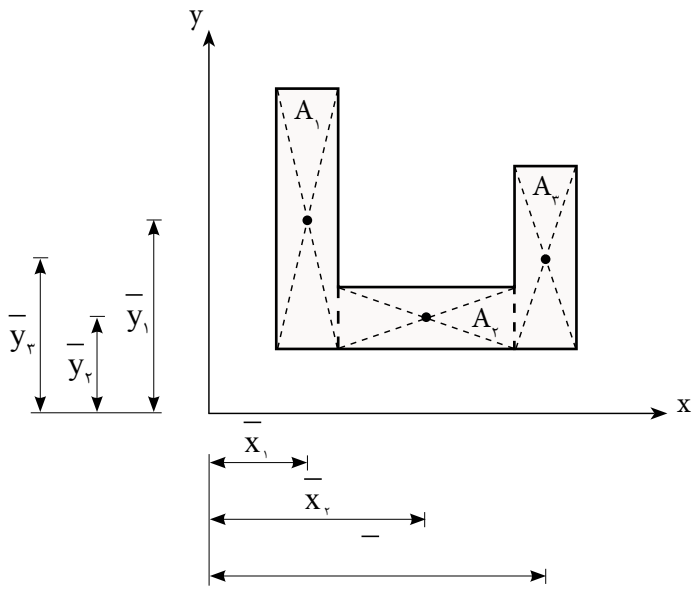
$Q_y = A.\overline{X} \Rightarrow Q_y = ۸ \times ۴ = ۳۲cm^۳$ ممان استاتیک نسبت به محور y

۲-۶ گشتاور اول (ممان استاتیک) سطوح مرکب

به منظور محاسبه گشتاور اول سطوح مرکب، آن‌ها را به سطوح هندسی ساده تجزیه نموده و ممان استاتیک هر یک از آن‌ها را نسبت به محورهای مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نمائیم. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i$$
$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \qquad (۲-۶)$$

به عنوان نمونه در شکل (۶-۲) خواهیم داشت:

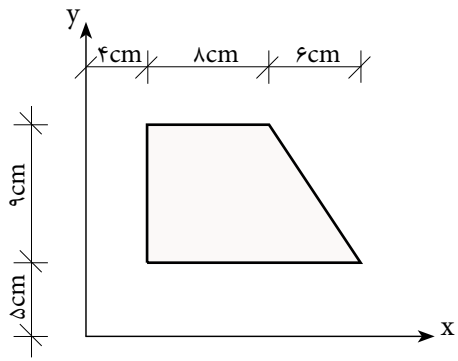


شکل ۶-۲

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \Rightarrow Q_x = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$
$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \Rightarrow Q_y = A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3$$

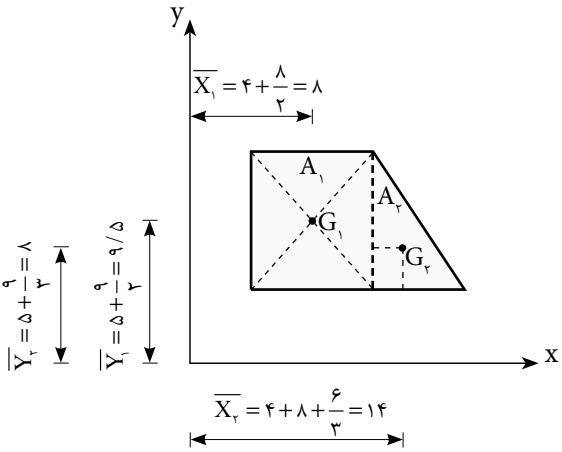
مثال ۲

گشتاور اول سطح داده‌شده را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



حل:

سطح مرکب داده شده را مطابق شکل زیر به دو سطح ساده مستطیلی و مثلثی تجزیه می‌کنیم.



به کمک جدول (۶-۲) حل مسئله را ادامه می‌دهیم

جدول (۶-۲)					
سطوح	مساحت (A_i) cm^2	$\bar{x}$ cm	$\bar{y}$ cm	$Q_x = A\bar{y}_i$ cm^3	$Q_y = A\bar{x}_i$ cm^3
A_1	$۸\times۹ = ۷۲$	۸	۹/۵	$۷۲\times۹/۵=۶۸۴$	$۷۲\times۸=۵۷۶$
A_2	$\frac{۶\times۹}{۲} = ۲۷$	۱۴	۸	$۲۷\times۸=۷۱۶$	$۲۷\times۱۴=۳۷۶$
Σ				۱۴۰۰	۹۵۴

بنابراین:

$$Q_x = ۱۴۰۰ \ cm^3$$
$$Q_y = ۹۵۴ \ cm^3$$

۳-۶ مرکز سطح سطوح مرکب

برای محاسبه مرکز سطح سطوح مرکب با توجه به این‌که گشتاور اول کل سطح با مجموع گشتاورهای اول اجزای سطح مرکب با هم برابرند می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned} Q_y &= A\bar{X} \\ Q_y &= \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

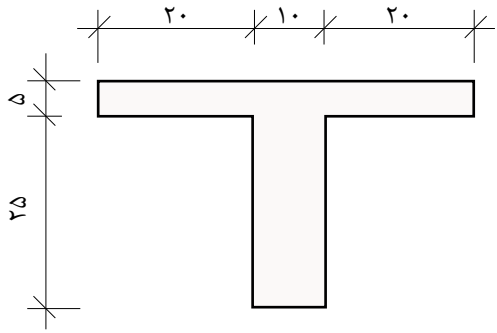
$$\left.\begin{aligned} Q_x &= A\bar{Y} \\ Q_x &= \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \qquad (۳-۶)$$

در روابط فوق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مختصات مرکز سطح مرکب مورد نظر می‌باشند که نسبت به محورهای مختصات دلخواه تعیین می‌شوند.

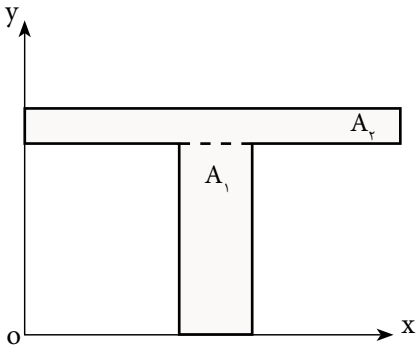
مثال ۳

مختصات مرکز سطح شکل زیر را محاسبه نمائید.

(ابعاد شکل بر حسب cm است)



به‌منظور سادگی حل مسئله محورهای مختصات x و y را طوری در نظر می‌گیریم که شکل در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و تمام طول‌ها مثبت باشند.



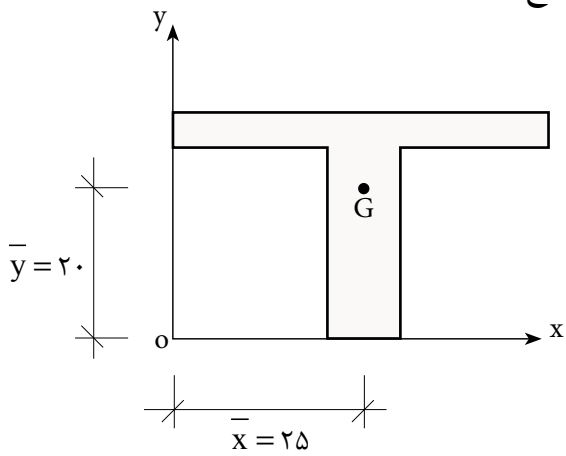
پس از تجزیه شکل مرکب به سطوح ساده جدول مشخصات آن‌ها را تشکیل داده و با استفاده از روابط (۶-۳) مختصات مرکز سطح را محاسبه می‌نمائیم. (جدول ۶-۳)

جدول (۶-۳)					
سطوح	مساحت (A_i) cm^2	$\bar{x}_i$ cm	$\bar{y}_i$ cm	$Q_x = A\bar{y}_i$ cm^3	$Q_y = A_i\bar{x}_i$ cm^3
A_1	۱۰×۲۵=۲۵۰	$۲۰+\frac{۱۰}{۲}=۲۵$	$\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$	۳۱۲۵	۶۲۵۰
A_2	۵×۵۰=۲۵۰	$\frac{۵۰}{۲}=۲۵$	$۲۵+\frac{۵}{۲}=۲۷/۵$	۶۸۷۵	۶۲۵۰
$\sum$	۵۰۰			۱۰۰۰۰	۱۲۵۰۰

$$\bar{X}=\frac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}=\frac{۱۲۵۰۰}{۵۰۰}=۲۵cm$$

$$\bar{Y}=\frac{\sum A_i\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{۱۰۰۰۰}{۵۰۰}=۲۰cm$$

در شکل زیر مختصات مرکز سطح نشان داده شده است:



G | ۲۵ cm
۲۰ cm

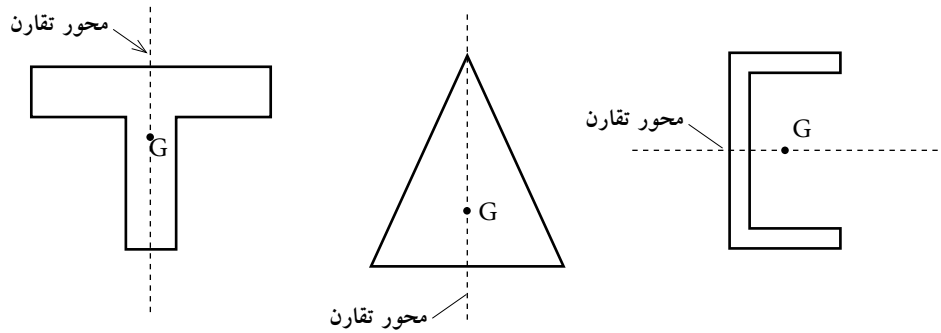
۶-۴ استفاده از تقارن در تعیین مرکز سطح سطوح متقارن

محور تقارن: خطی است که سطح را به دو قسمت مساوی و قرینه تقسیم می‌کند.

۶-۴-۱- سطوح با یک محور تقارن

اگر سطح دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.

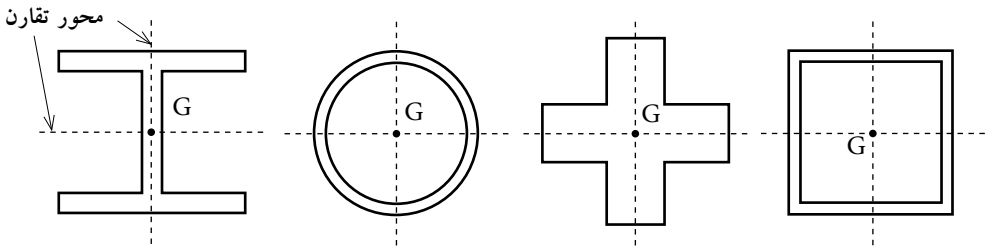
شکل (۶-۳)



شکل ۶-۳

۶-۴-۲- سطوح با دو محور تقارن:

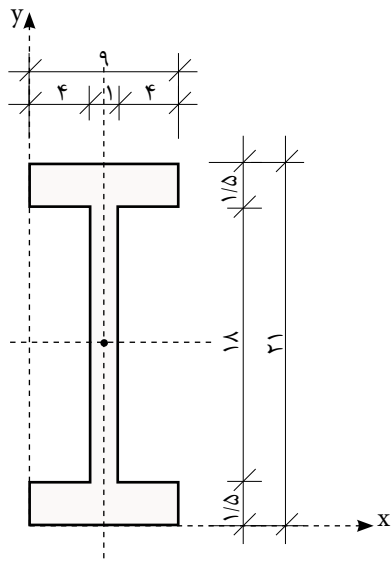
هرگاه سطح دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح در محل تلاقی آن دو محور خواهد بود. شکل (۶-۴)



شکل ۶-۴

مثال ۴

در شکل زیر با استفاده از تقارن مختصات مرکز سطح را به‌دست آورید.
(ابعاد بر حسب سانتی‌متر می‌باشد)



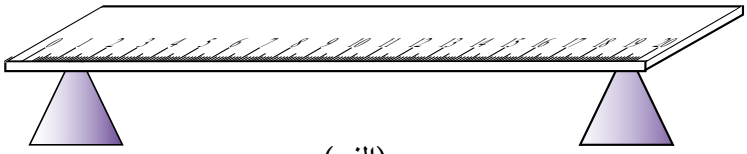
باتوجه به این که شکل دارای دومحور تقارن می‌باشد لذا مرکز سطح محل تلاقی آن‌ها خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵ \quad cm$$

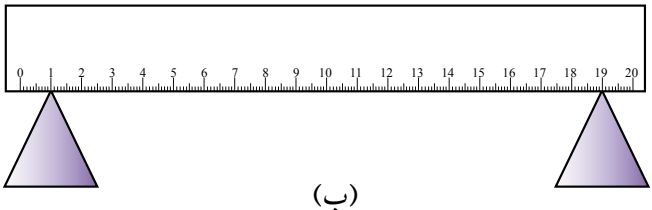
$$\bar{y} = \frac{۲۱}{۲} = ۱۰/۵ \quad cm$$

۶ – ۵ گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی) (Moment of Inertia)

خط کشی را مطابق شکل (۶-۵) در نظر می گیریم اگر بخواهیم آن‌را در دو حالت نشان‌داده‌شده خم کنیم به نظر شما درکدام حالت راحت‌تر خم می‌شود؟ چرا؟



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵

باتوجه به مثال فوق درمی‌یابیم علی‌رغم آن‌که سطح مقطع خط‌کش در هر دو حالت یکسان است در حالت (الف) خط‌کش راحت‌تر خم می‌شود. یعنی مقاومت آن در مقابل خم شدن (خمش) کمتر از حالت (ب) می‌باشد. علت آن ممان اینرسی سطح مقطع خط‌کش است که درحالت (الف) کمتر از حالت (ب) می‌باشد.

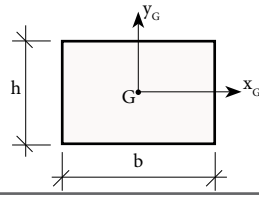
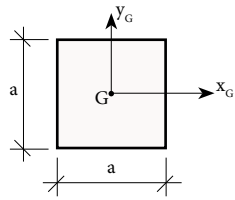
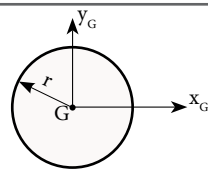
به عنوان یک تعریف ساده از ممان اینرسی، می‌توان گفت:

گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می‌باشد و به توزیع ذرات تشکیل‌دهندهٔ جسم حول محور خمش بستگی دارد.

ممان اینرسی را با نماد $\mathbf{I}$ نشان داده و نسبت به محورهای مختلف با اندیس آن محور نام‌گذاری می‌شود. به عنوان مثال، $\mathbf{I_x}$ یعنی ممان اینرسی نسبت به محور $\mathbf{x}$.

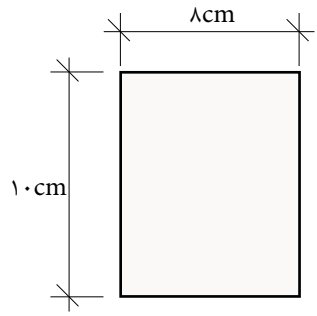
واحد ممان اینرسی، طول به توان ۴ یعنی $\mathbf{cm^4}$ یا $\mathbf{mm^4}$ و ... می‌باشد.

درجدول (۶-۴) روابط ممان اینرسی بعضی از سطوح هندسی ساده نسبت به محورهای مرکزی آن‌ها آمده است.

جدول (۶-۴)			
نام سطح	شکل هندسی	Ix_G	Iy_G
مستطیل		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
مربع		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
دایره		$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$

مثال ۵

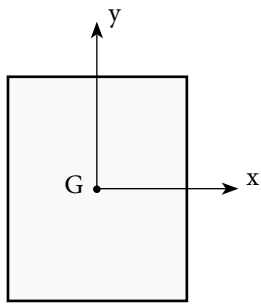
ممان اینرسی سطح مقطع مقابل را نسبت به محورهای مرکزی آن محاسبه نمایید.



حل:

مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می‌باشد بنابراین:

ابتدا موقعیت محورهای مرکزی سطح مقطع را مشخص نموده سپس با استفاده از روابط جدول (۶-۴) I_{xG} و I_{yG} را تعیین می‌نمائیم.



$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \times 10^3}{12} = 666/67 \quad cm^4$$

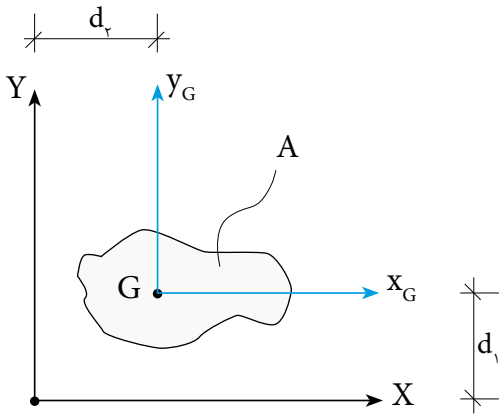
$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \times 8^3}{12} = 426/67 \quad cm^4$$

۶-۶ قضیه محورهای موازی

درقسمت قبل روش تعیین ممان اینرسی یک سطح نسبت به محور هایی که از مرکز آن سطح می گذرد ، را دیدیم.

حال می‌خواهیم ممان اینرسی یک سطح را نسبت به محورهایی که موازی محورهای مرکزی آن می‌باشند، به‌دست آوریم.

به عنوان مثال در شکل (۶-۵) با فرض اینکه ممان اینرسی آن نسبت به محورهای مرکزی (x_G و y_G) معلوم باشد، می‌خواهیم ممان اینرسی مقطع را نسبت به محورهای X و Y که با فاصله d_1 و d_2 از محورهای مرکزی قرار دارند، محاسبه کنیم.



شکل ۶-۵

این موضوع با قضیه محورهای موازی که به صورت زیر بیان می‌شود قابل محاسبه خواهد بود.

ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهایی که موازی با محورهای مرکزی آن سطح می‌باشند، برابر است با ممان اینرسی آن سطح نسبت به محورهای مرکزی به اضافه حاصل ضرب مساحت در مجذور فاصله محور مورد نظر تا مرکز سطح.

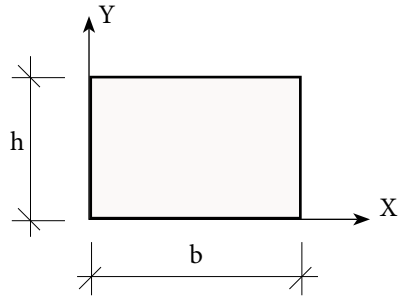
یعنی:

$$I_X = I_{x_G} + Ad_1^2$$
$$I_Y = I_{y_G} + Ad_2^2 \qquad (۴-۶)$$

مثال ۶

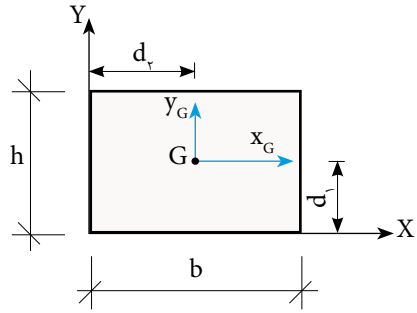
در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:

محاسبه **Ix** و **Iy**



حل:

الف) ابتدا ممان اینرسی را نسبت به محورهای مرکزی آن یعنی x_G و y_G تعیین می‌کنیم.



$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12}$$

ب) با توجه به این که محور **X** بر طول مستطیل مماس می‌باشد، فاصله آن از محور x_G یعنی d_1 برابر است با:

$$d_1 = \frac{h}{2}$$

$$A = b.h$$

$$I_X = I_{xG} + Ad_1^2 \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + (b.h)(\frac{h}{2})^2$$

$$\Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12}$$

$$I_X = \frac{4bh^3}{12} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{3}$$

ج) برای محور Y نیز خواهیم داشت:

$$d_۲ = \frac{b}{۲}$$

$$A = b.h$$

$$I_Y = I_{yG} + Ad_۲^۲ \Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳}{۱۲} + (b.h)(\frac{b}{۲})^۲$$

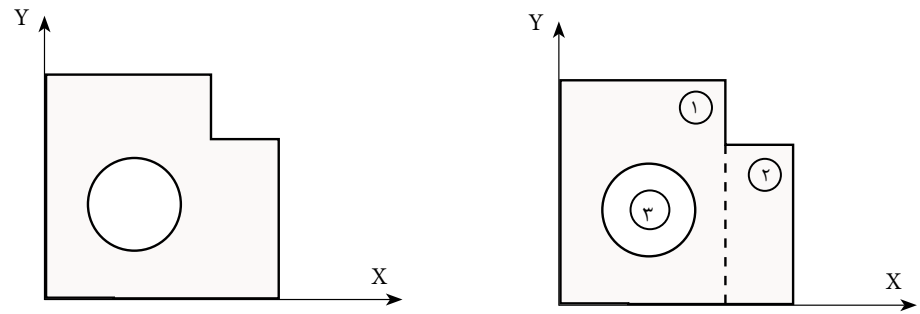
$$\Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳}{۱۲} + \frac{hb^۳}{۴} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳ + ۳hb^۳}{۱۲}$$

$$I_Y = \frac{۴hb^۳}{۱۲} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳}{۳}$$

۶- ۷ محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب

برای محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب، آن‌ها را به اشکال هندسی ساده تجزیه نموده و ممان اینرسی هر یک را نسبت به محور مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم.

شکل (۶-۶)



$$I_X = I_{X۱} + I_{X۲} - I_{X۳}$$

$$I_Y = I_{Y۱} + I_{Y۲} - I_{Y۳}$$

شکل ۶-۶

و به‌طور کلی خواهیم داشت:

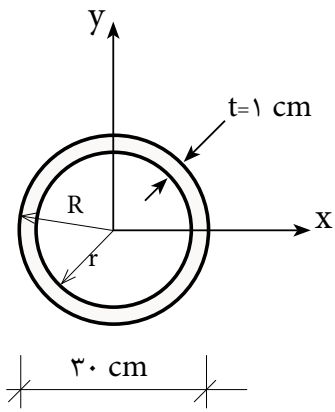
$$I_X = \sum_{i=۱}^{n} I_{Xi} = \sum_{i=۱}^{n} (I_{X_{Gi}} + A_i d_i^۲)$$

$$I_Y = \sum_{i=۱}^{n} I_{Yi} = \sum_{i=۱}^{n} (I_{Y_{Gi}} + A_i d_i^۲)$$

(۵-۶)

مثال ۷

در شکل زیر مطلوب‌است محاسبهٔ ممان اینرسی نسبت به محورهای x و y.



$$R = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵$$

$$r = R - t \Rightarrow r = ۱۵ - ۱ \Rightarrow r = ۱۴ \quad cm$$

$$I_x = I_y = I_{\text{خارجی}} - I_{\text{داخلی}}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^۴}{۴} - \frac{\pi r^۴}{۴}$$

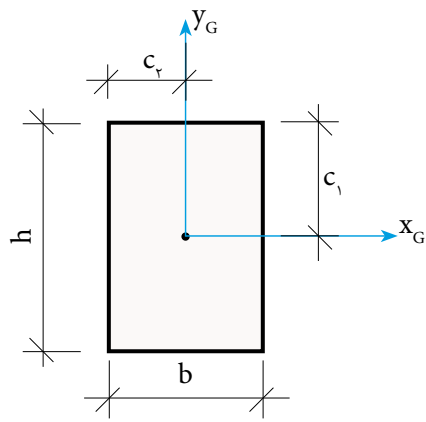
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{۴}(R^۴ - r^۴) = \frac{\pi}{۴}(۱۵^۴ - ۱۴^۴)$$

$$I_x = I_y = ۹۵۸۸/۹۳ \quad cm^۴$$

۶-۸ مدول مقطع (اساس مقطع) (Section Modulus)

اساس مقطع یا مدول مقطع نیز خاصیتی از سطح است که همانند ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می‌باشد که در فصل نهم با کاربرد آن آشنا خواهید شد.

مدول مقطع یک سطح مطابق شکل (۶-۷) با رابطه زیر تعریف می‌شود.



شکل ۶-۷

$$S_{x_G} = \frac{I_{x_G}}{c_۱} \qquad (۶-۶)$$

در این رابطه داریم:

S_{x_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور x_G

I_{x_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور x_G

C_1 : فاصلهٔ دورترین تار تحتانی یا فوقانی سطح نسبت به محور مرکزی (x_G) می‌باشد که در مقاطع متقارن برابر نصف کل ارتفاع مقطع می‌باشد. یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2}$$

و برای محور y نیز رابطه‌ای مشابه رابطهٔ (۶-۶) خواهیم داشت بنابراین:

$$S_{y_G} = \frac{I_{y_G}}{c_2} \qquad (۷-۶)$$

S_{y_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور y_G

I_{y_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور y_G

C_2 : فاصله دورترین تار سمت چپ یا راست مقطع نسبت به محور مرکزی (y_G) می‌باشد که در مقاطع متقارن برابر نصف پهنای مقطع است. یعنی:

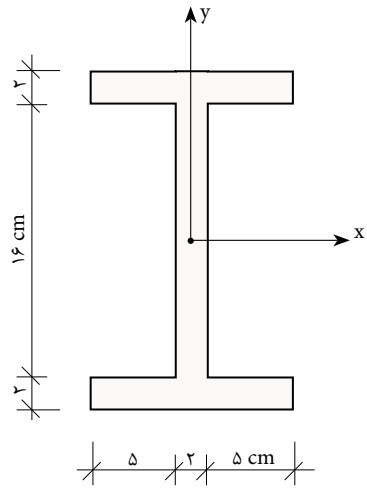
$$c_2 = \frac{b}{2}$$

مثال ۸

درشکل روبه‌رو مطلوب‌است:

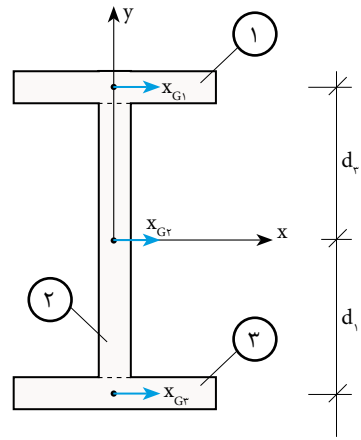
الف) محاسبه I_x

ب) محاسبه S_x



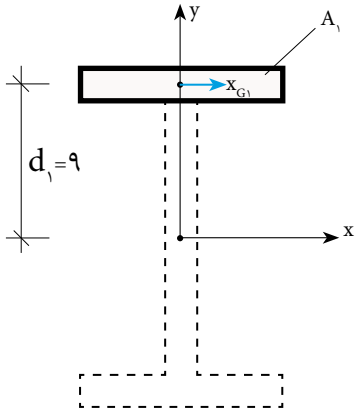
الف)

– ابتدا سطح مقطع را به سه سطح ۱، ۲ و ۳ تجزیه می‌کنیم.



– به کمک قضیه محورهای موازی ممان اینرسی هریک از سطوح را نسبت به محور x محاسبه می‌کنیم.

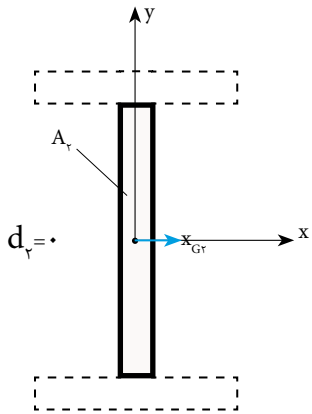
محاسبه I_{x_1}:



$$I_{x_1} = I_{xG_1} + A_1 d_1^2$$

$$I_{x_1} = \frac{۱۲\times۲^3}{۱۲} + (۲\times۱۲)(۹)^2 = ۱۹۵۲ \ \ cm^4$$

محاسبه I_{x_2}:

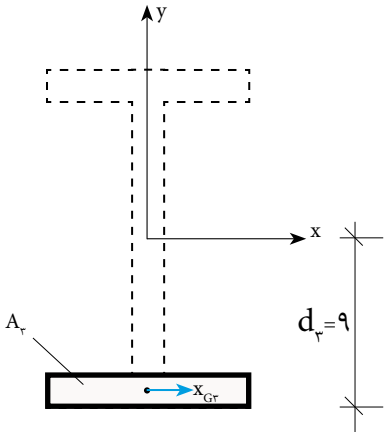


$$I_{x_2} = I_{xG_2} + A_2 d_2^2$$

$$I_{x_2} = \frac{2\times16^3}{12} + (2\times16)(0)^2$$

$$I_{x_2} = 682/67 \quad cm^4$$

محاسبه I_{x_3}:



به دلیل تقارن A_1 و A_3 نسبت به محور **x** داریم:

$$I_{x_3} = I_{x_1} = 1952 \quad cm^4$$

ممان اینرسی کل مقطع برابر است با:

$$I_x = \sum_{i=1}^{3} I_{x_i} = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}$$

$$I_x = 1952 + 682/67 + 1952$$

$$\boxed{I_x = 4586/67 \quad cm^4}$$

ب) از رابطه (۶-۶) مدول مقطع نسبت به محور **x** را به‌دست می‌آوریم.

به دلیل تقارن، مقطع C_1 برابر است با نصف کل ارتفاع مقطع یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{20}{2} = 10 \quad cm$$

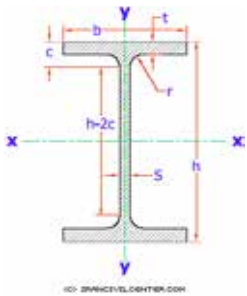
$$S_x = \frac{I_x}{c_1} \Rightarrow S_x = \frac{4586/67}{10}$$

$$\boxed{S_x = 458/67 \quad cm^3}$$

۶- ۹ مشخصات هندسی مقاطع نوردشده

با توجه به این که مقاطع نوردشده با استانداردهای کارخانهٔ سازنده تولید می‌شوند، لذا برای هریک از مقاطع تولیدی شامل تیر آهن‌ها، ناودانی‌ها، نبشی‌ها و ... جداول مشخصات هندسی هر مقطع نیز ارائه می‌شود که با استفاده از این جداول مشخصات هندسی مقاطع نظیر ابعاد، سطح مقطع، ممان اینرسی و ... استخراج می‌شوند، به عنوان مثال شکل (۶-۷) قسمتی از جدول مشخصات مقاطع نیم پهن (IPE) را نشان می‌دهد که برای نمونه مشخصات هندسی IPE ۲۰۰ را از آن استخراج نموده‌ایم.

نیمرخ نیم پهن IPE



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	a_1	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1

مشخصات IPE۲۰۰:

مساحت مقطع	$A=۲۸/۵\ cm^۲$	ارتفاع مقطع	$h=۲۰۰\ mm=۲۰\ cm$
ممان اینرسی حول محور x	$I_x=۱۹۴۰\ cm^۴$	عرض بال	$b=۱۰۰\ mm=۱۰\ cm$
اساس مقطع حول محور x	$S_x=۱۹۴\ cm^۳$	ضخامت جان	$S=۵/۶\ mm=۰/۵۶\ cm$
ممان اینرسی حول محور y	$I_y=۱۴۲\ cm^۴$	ضخامت بال	$t=۸/۵\ mm=۰/۸۵\ cm$
اساس مقطع حول محور y	$S_y=۲۸/۵\ cm^۳$		

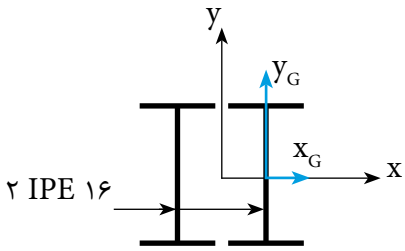
درصورتی‌که مقطع مورد نظر ترکیبی از دو یا چند مقطع نوردشده باشد می‌توان ابتدا مشخصات هندسی مقطع نوردشدهٔ ساده (تکی) را از جدول استخراج نموده و سپس با استفاده از قضیه محورهای موازی مشخصات هندسی مقطع مرکب را به‌دست آورد.

مثال ۹

در شکل زیر دوتیرآهن IPE ۱۶ به صورت به‌هم چسبیده به عنوان یک مقطع مرکب ساخته شده است مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) ممان اینرسی مقطع مرکب حول **x** و **y**.

ب) مدول مقطع حول دو محور **x** و **y**.



ابتدا مشخصات هندسی مورد نیاز تیر آهن IPE ۱۶ را از جدول استخراج می‌نماییم.

IPE ۱۶ : (h=۱۶۰mm=۱۶cm , b=۸۲ mm=۸/۲ cm , A=۲۰/۱ cm^2 , I_x=۸۶۹ cm^4 , I_y=۶۸/۳ cm^4)

الف) محاسبه I_x و I_y مقطع مرکب:

باتوجه به اینکه مقطع مرکب ساخته شده نسبت به محور های **x** و **y** متقارن می‌باشد کافی‌است که ممان اینرسی یک پروفیل نسبت به محورهای مورد نظر را محاسبه نموده و دو برابر نماییم. بنابراین با استفاده از قضیه محورهای موازی خواهیم داشت:

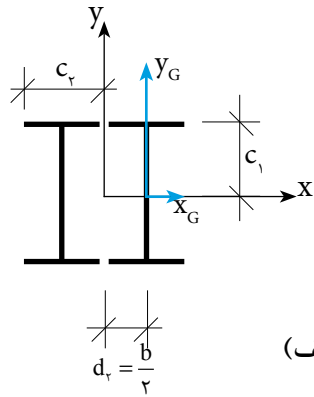
$$I_x = ۲(I_{x_G} + Ad_۱^۲)$$

$$I_y = ۲(I_{y_G} + Ad_۲^۲)$$

باتوجه به شکل (الف) مقدار $d_۱$ نسبت به محور **x** به دلیل انطباق محورهای x_G در پروفیل تک و **x** در پروفیل مرکب برابر صفر است لذا:

$$I_x = ۲I_{x_G} \Rightarrow I_x = ۲\times ۸۶۹ \Rightarrow \boxed{I_x = ۱۷۳۸ \ \ cm^4}$$

و مقدار $d_۲$ نسبت به محور y برابر نصف عرض بال IPE ۱۶ می‌باشد یعنی:



(شکل الف)

$$d_۲ = \frac{b}{۲} = \frac{۸/۲}{۲} = ۴/۱ \quad cm$$

$$I_y = ۲(I_y + Ad_۲^۲) = ۲(۶۸/۳ + ۲۰/۱ \times ۴/۱^۲) \Rightarrow$$

$$\boxed{I_y = ۸۱۲/۳۶ \quad cm^۴}$$

$$c_۱ = \frac{h}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \quad cm$$

$$c_۲ = b = ۸/۲ \quad cm$$

$$S_x = \frac{I_x}{c_۱} \Rightarrow S_x = \frac{۱۷۳۸}{۸} = ۲۱۷/۲۵ \quad cm^۳$$

$$S_y = \frac{I_y}{c_۲} \Rightarrow S_y = \frac{۸۱۲/۳۶}{۸/۲} = ۹۹/۰۷ \quad cm^۳$$

نکته:

با توجه به نتایج مثال ۹ و مقایسهٔ آن با مشخصات هندسی IPE ۱۶ مشاهده می‌شود که:

ممان اینرسی مقطع مرکب حول محور x دو برابر ممان اینرسی مقطع ساده (تکی) می‌باشد، به همین ترتیب اگر تعداد مقاطع n برابر شود و مرکز سطح آن‌ها بر محور x منطبق باشد، ممان اینرسی مقطع مرکب حول محور x نیز n برابر خواهد شد.

خلاصهٔ فصل

• گشتاور اول سطح نسبت به یک محور عبارت‌است از: حاصل‌ضرب مساحت، در فاصله مرکز آن تا آن محور مورد نظر و نسبت به محور های **x** و **y** به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_x = A.\overline{Y}$$
$$Q_y = A.\overline{X}$$

• گشتاور اول سطوح مرکب با تجزیه آن‌ها به سطوح ساده هندسی و محاسبه گشتاور اول سطح هرکدام نسبت به محورهای مورد نظر و جمع جبری آن‌ها محاسبه می‌شود. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} A_i.\overline{y}_i$$
$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} A_i.\overline{x}_i$$

• مختصات مرکز سطح یک سطح هندسی با استفاده از گشتاور اول سطح و رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\overline{X} = \frac{\sum A_i \overline{x}_i}{\sum A_i}$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum A_i \overline{y}_i}{\sum A_i}$$

• اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.

• اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز سطح، محل تلاقی آن دو محور خواهد بود.

• ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش است.

• اگر تعداد مقاطع روی یک محور **n** برابر شود درصورتی که مرکز سطح آن‌ها روی آن محور قرار گیرد در این حالت ممان اینرسی کل نیز **n** برابر خواهد شد.

• ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهای موازی محور مرکزی آن با رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$I_x = I_{x_G} + Ad_1^2$: d_1 فاصله دو محور x_G و X می‌باشد.

$I_y = I_{y_G} + Ad_2^2$: d_2 فاصله دو محور y_G و Y می‌باشد.

• اساس مقطع نیز همانند ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

C_1: فاصله دورترین تار مقطع تا محور x $\quad S_x = \frac{I_x}{c_1}$

C_2: فاصله دورترین تار مقطع تا محور y $\quad S_y = \frac{I_y}{c_2}$

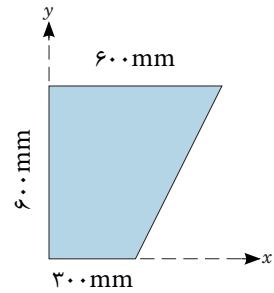
• مشخصات هندسی مقاطع نوردشده از جداول استاندارد آن‌ها استخراج می‌شود.

• ممان اینرسی مقاطع مرکب با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی محاسبه می‌شود.

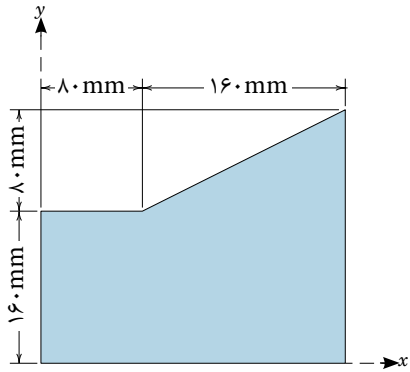
خودآزمایی

۱- در شکل‌های زیر مختصات مرکز سطح را محاسبه کنید.

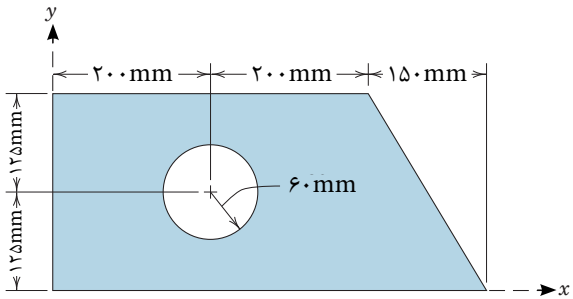
(الف)

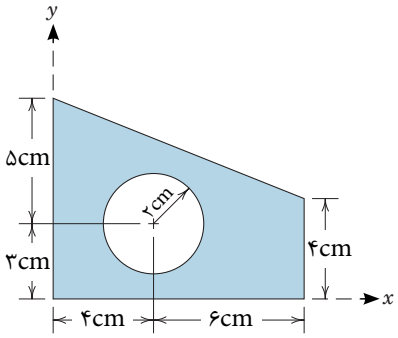


(ب)

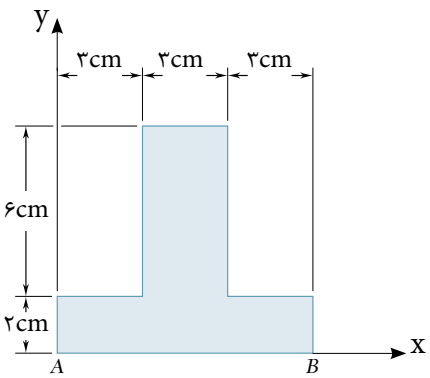


(ج)

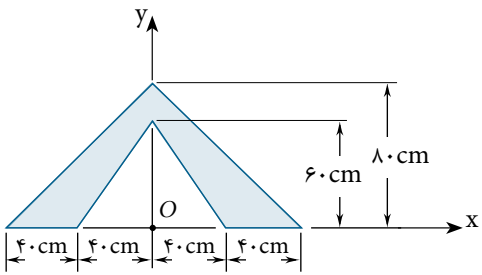

y
۲۰۰mm
۲۰۰mm
۱۵۰mm
۱۲۵mm
۱۲۵mm
۶۰mm
x


y
۵cm
۳cm
۲cm
۴cm
x
۴cm
۶cm

(د)

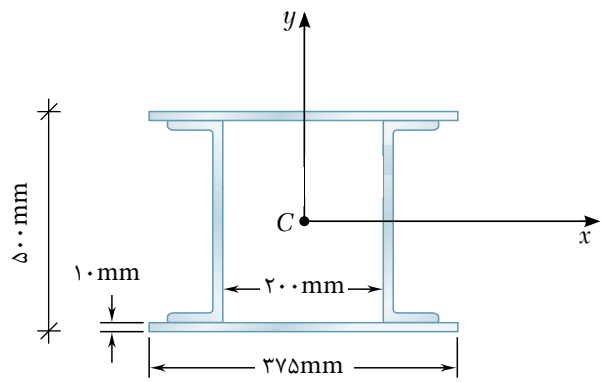

y
۳cm
۳cm
۳cm
۶cm
۲cm
x
A
B

(ه)


y
۸۰cm
۶۰cm
O
x
۴۰cm
۴۰cm
۴۰cm
۴۰cm

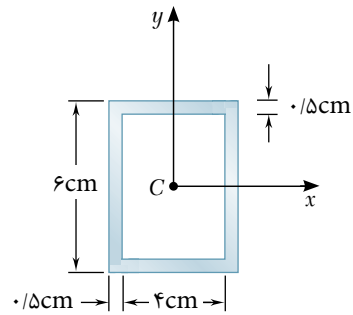
(و)

۲- با استفاده از تقارن، مختصات مرکز سطح را به‌دست آورید.

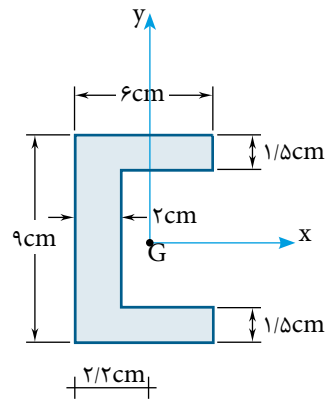


۳- در هر مقطع مطلوب‌است محاسبهٔ I_x و I_y و S_x و S_y.

(الف)



(ب)

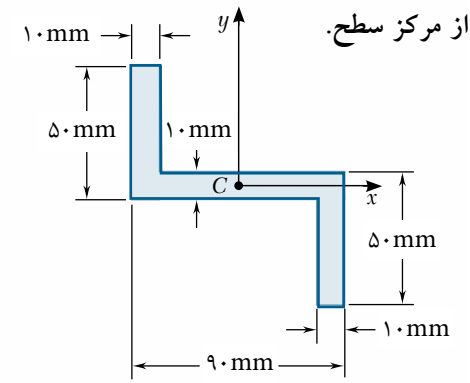


۴- در هر کدام از مقاطع مطلوب‌است محاسبهٔ:

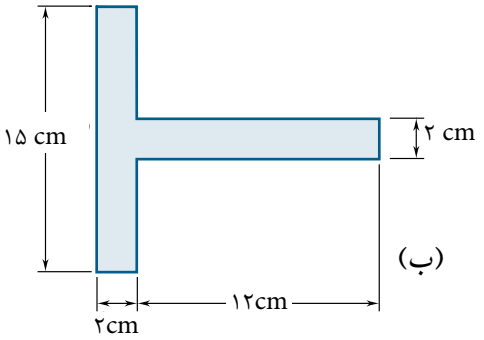
الف) مختصات مرکز سطح

ب) ممان اینرسی حول محورهای گذرنده از مرکز سطح

ج) اساس مقطع نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح.

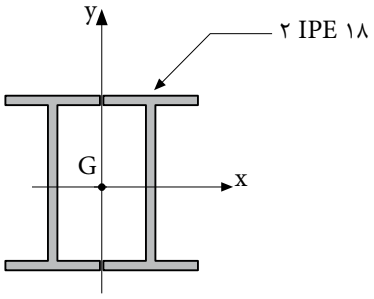


(الف)

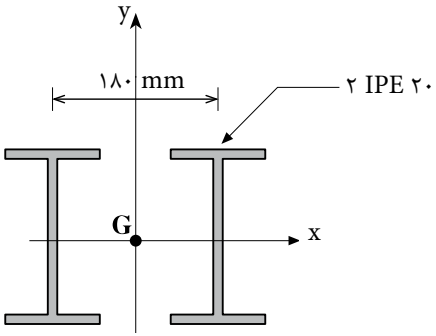


(ب)

۵- مطلوب‌است محاسبهٔ I_x و I_y و S_x و S_y در مقاطع مرکب زیر.



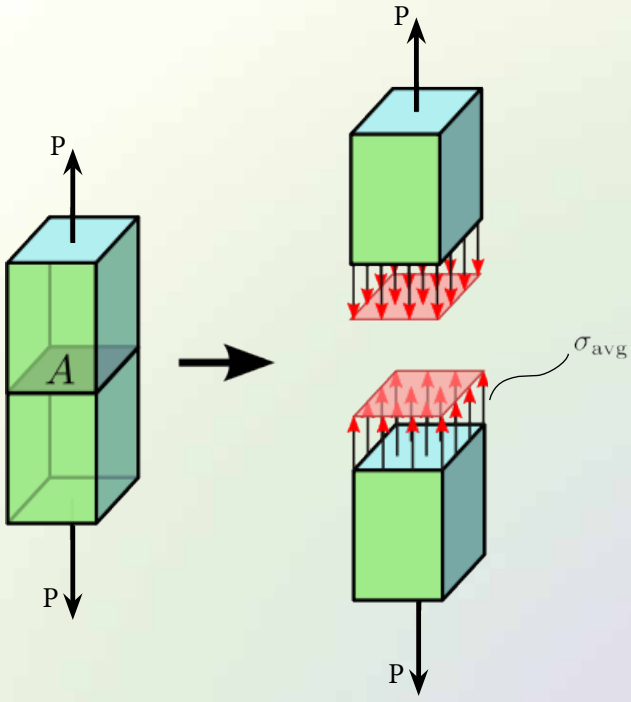
(الف)



(ب)

فصل
هفتم

نیرو و
تنش محوری



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱-انواع رفتار اجسام را تحت تأثیر بارهای مختلف نام ببرد.

۲-نیروهای محوری را شرح دهد.

۳-اثر نیروهای محوری را بر اجسام توضیح دهد.

۴-تنش را تعریف نماید.

۵-تنش محوری را تعریف نماید.

۶-رابطهٔ تنش محوری را به کار گیرد.

۷-تغییر طول اجسام تحت تأثیر بارهای محوری را محاسبه نماید.

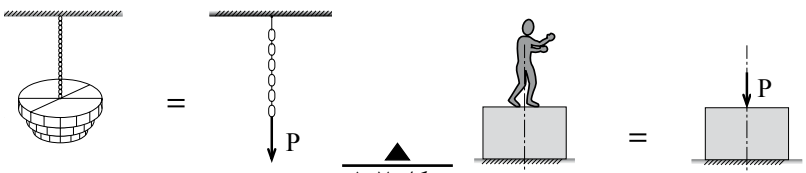
مقدمه:

در بخش اول کتاب به بررسی نیروهای وارد بر اجسام پرداختیم و اجسام را صلب در نظر گرفتیم بدین مفهوم که جسم در اثر اعمال نیرو تغییر شکل نمی‌دهد که موضوع بحث استاتیک بود.

دراین بخش می‌خواهیم اثر نیروها را بر اجسام، بیشتر مورد بررسی قرار داده و رفتار آن‌ها را تحت تاثیر نیروهای مختلف تجزیه و تحلیل نماییم، که با این فرض که جسم صلب نباشد، یعنی تغییر شکل اجسام نیز مد نظر می‌باشد، که موضوع بحث مقاومت مصالح است. بنابراین مقاومت مصالح شاخه ای از علم مکانیک است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌نماید.

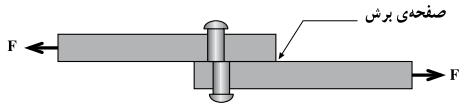
رفتار اجسام تحت بار های مختلف عبارتند از :

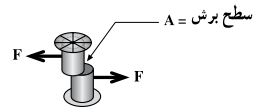
۱- رفتار کششی و فشاری



شکل ۷-۱

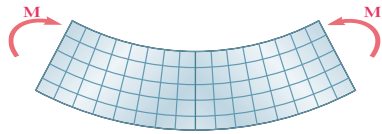
۲- رفتار برشی





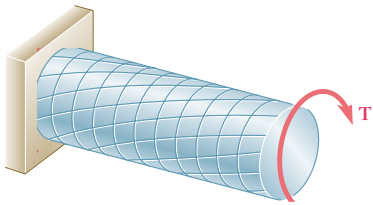
شکل ۷-۲

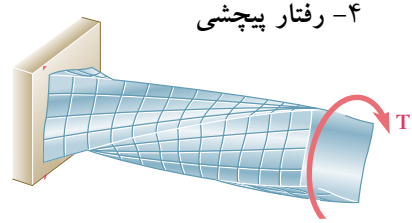
۳- رفتار خمشی



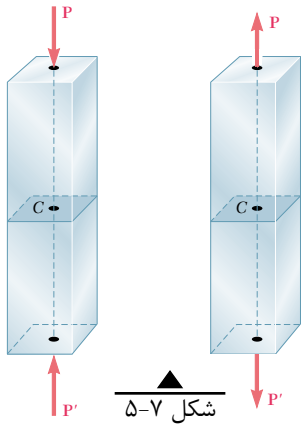
شکل ۷-۳

۴- رفتار پیچشی

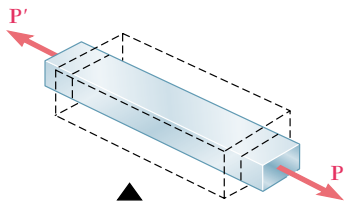




شکل ۷-۴



شکل ۷-۵



شکل ۷-۶

۷-۱ نیروهای محوری (Axial Load)

نیروهای محوری، نیروهایی هستند که در امتداد محور طولی اجسام و عمود بر سطح مقطع آنها وارد می‌شوند. شکل (۷-۵)

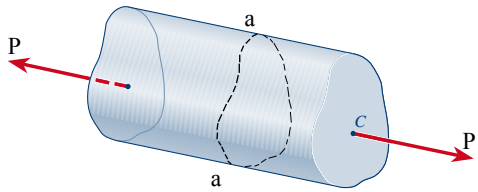
نیروهای محوری می‌توانند به صورت کششی یا فشاری به اجسام وارد شوند و در آن‌ها افزایش یا کاهش طول ایجاد نمایند.

همان‌طور که در شکل (۷-۶) دیده می‌شود، بارهای محوری ضمن افزایش یا کاهش طول، سبب کاهش یا افزایش ابعاد دیگر جسم نیز می‌شوند که در این فصل تنها به بررسی رفتار طولی آنها می پردازیم.

۲-۷ تنش محوری (Axial Stress)

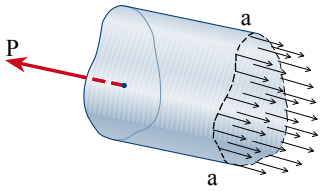
میله منشوری مطابق شکل (۷ –۷) را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروی کششی **P** واقع شده است.

به نظر شما اثر نیروی **P** در یک مقطع دلخواه مانند **(a–a)** به چه صورت خواهد بود؟



شکل ۷-۷

در پاسخ به این سوال باید این‌طور تصور نمود که هر ذرهٔ جسم در مقطع **(a–a)** مقداری از نیروی **P** را تحمل می‌نماید و اثر این نیرو در مقطع **(a–a)**، مطابق شکل (۷-۸)، به صورت نیروهای گسترده دیده می‌شود.



شکل ۷-۸

به این نیروهای گسترده موجود در سطح مقطع **(a–a)** تنش گفته می‌شود. بنابراین می‌توان گفت:

«نیروی وارد به واحد سطح، تنش نامیده می‌شود»

چنان‌چه نیروی وارده نیروی محوری باشد، تنش ایجاد شده را تنش محوری نامیده و با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma = \frac{\pm P}{A} \qquad (۱-۷)$$

σ : تنش محوری (فشاری یا کششی)

P : نیروی محوری (کششی با علامت + و فشاری با علامت –)

A : سطح مقطع

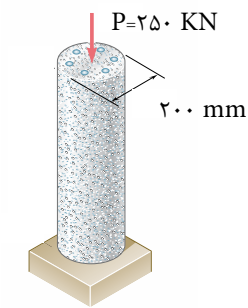
واحد تنش در سیستم **SI** با توجه به رابطهٔ آن، $\frac{N}{m^2}$ (پاسکال **Pa**) می‌باشد و بهتر است به‌منظور هماهنگی با آئین‌نامه‌ها در محاسبات از واحد $\frac{N}{mm^2}$ (مگاپاسکال **MPa**) استفاده شود.

نکته:

اگر نیروی محوری (**P**) کششی باشد تنش ایجادشده تنش کششی خواهد بود و σ مثبت می‌باشد.

اگر نیروی محوری (**P**) فشاری باشد تنش ایجادشده تنش فشاری خواهد بود و σ منفی می‌باشد.

مثال ۱



ستونی کوتاه مطابق شکل روبه‌رو تحت تاثیر نیروی محوری $P=۲۵۰KN$ قرار دارد.

مطلوب‌است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).

حل:

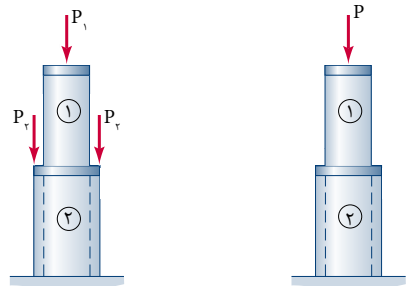
نیروی **P** فشاری است: $P=-۲۵۰KN=-۲۵۰\times۱۰۰۰=-۲۵۰۰۰۰\ N$

$$A=\frac{\pi d^2}{۴}=\frac{\pi\times۲۰۰^2}{۴}=۳۱۴۰۰\ mm^2$$

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{-۲۵۰۰۰۰}{۳۱۴۰۰}\Rightarrow \boxed{\sigma=-۷/۹۶\ \frac{N}{mm^2}\ \text{یا}\ MPa}$$

علامت منفی نشانگر آن‌است که تنش محوری ایجاد شده فشاری می‌باشد.

در صورتی‌که جسم دارای مقطع متفاوت باشد (شکل ۷-۹- الف) و یا بارگذاری در نقاط مختلف آن انجام شود (شکل ۷-۹- ب) تنش در هر قسمت از جسم متفاوت بوده و باید نیرو و مساحت هر قسمت را جداگانه تعیین و از رابطهٔ (۷-۱) تنش را در هر قسمت محاسبه نمود.

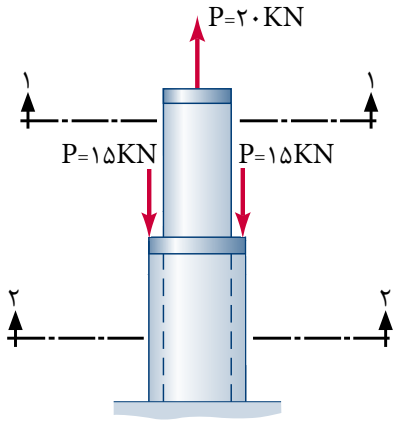


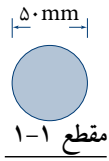
(الف) (ب)

شکل ۷-۹

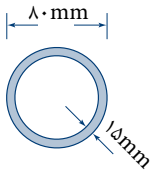
مثال ۲

جسمی مطابق شکل تحت تأثیر نیروهای نشان‌داده شده قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش در هر قسمت از جسم.





مقطع ۱-۱



مقطع ۲-۲

حل:

الف) تنش در مقطع ۱-۱

$$\begin{cases} P = ۲۰\ KN = ۲۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi\, D^{۲}}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^{۲}}{۴} = ۱۹۶۲/۵\ mm^{۲} \end{cases}$$

$$\sigma_{۱} = \frac{P}{A} = \frac{۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{۱} = ۱۰/۱۹\ MPa \quad \text{کششی}}$$

ب) تنش در مقطع ۲-۲

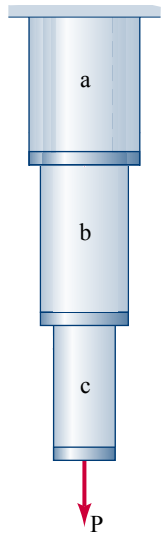
با توجه به شکل برآیند نیروهای وارد به مقطع (۲-۲) برابر است با:

$$\begin{cases} P = -۱۵ - ۱۵ + ۲۰ = -۱۰ KN = -۱۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi\, D^{۲}}{۴} - \dfrac{\pi\, d^{۲}}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۸۰^{۲}}{۴} - \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^{۲}}{۴} = ۳۰۶۱/۵\ mm^{۲} \end{cases}$$

$$\sigma_{۲} = \frac{P}{A} = \frac{-۱۰۰۰۰}{۳۰۶۱/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{۲} = -۳/۲۷\ MPa \quad \text{فشاری}}$$

مثال ۳

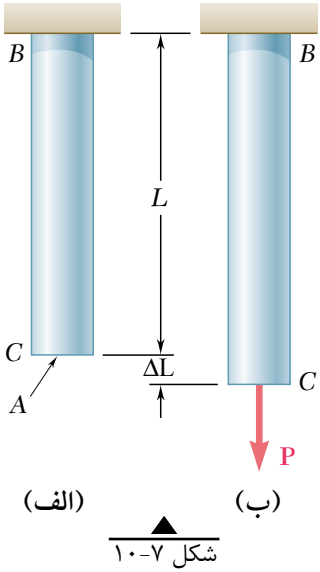
قطعه پیوسته ای مطابق شکل تحت تاثیر نیروی کششی **P** قرار گرفته است، هرگاه نیروی **P** را به آرامی افزایش دهیم، احتمال گسیختگی در کدام یک از نواحی **a** و**b** و**c** بیشتر است؟ چرا؟



جواب:

با توجه به این که مقدار **P** در هر سه ناحیه ثابت است، با افزایش تدریجی نیروی **P** مطابق رابطه $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ مقدار تنش در ناحیه **c** به‌دلیل سطح مقطع کوچک‌تر آن نسبت به نواحی **a** و **b** زودتر به تنشی می‌رسد که جسم دیگر قادر به تحمل آن نمی‌باشد.

۳-۷ تغییر طول اجسام تحت تاثیر بارهای محوری



شکل ۷-۱۰

میلهٔ **BC** به طول **L** و سطح مقطع **A** مطابق شکل (۷-۱۰- الف) مفروض است. اگر نیروی کششی **P** به آن وارد شود، سبب افزایش طول میله به اندازهٔ (ΔL) خواهد شد که مقدار آن از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود. شکل (۷-۱۰- ب)

$$\Delta L = \frac{P.\ L}{A.\ E} \qquad (۲-۷)$$

در این رابطه **E** ضریب ارتجاعی (مدول الاستیسیته) جسم می‌باشد که به جنس آن بستگی دارد و در آزمایشگاه مقاومت مصالح مقدار آن تعیین می‌شود و واحد آن نیز همان واحد تنش یعنی $\frac{N}{mm^2}$ و یا (**MPa**) است.

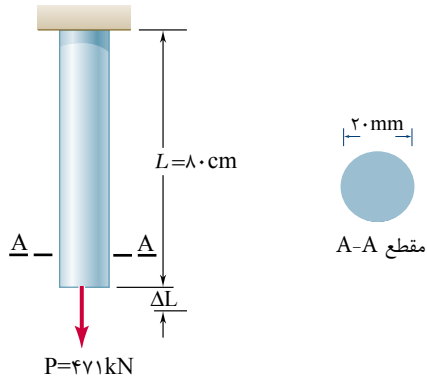
درجدول (۷-۱) ضریب ارتجاعی بعضی از مصالح آورده شده است.

جدول (۷-۱) ضریب ارتجاعی مصالح

مصالح	ضریب ارتجاعی $\frac{N}{mm^2}$ یا **MPa**
فولاد	۲×۱۰^۵
چدن	$۱/۲ \times ۱۰^۵$
آلومینیوم	$۰/۷ \times ۱۰^۵$
مس	۱×۱۰^۵

مثال ۴

مطلوب‌است تغییر طول میله فولادی مطابق شکل زیر؛ اگر ضریب ارتجاعی میله $E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$ باشد (از وزن میله صرف‌نظر می‌شود).



$$P = ۴۷۱\ KN = ۴۷۱۰۰۰\ N$$

$$L = ۸۰\ cm = ۸۰۰\ mm$$

$$A = \frac{\pi\ D^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴\times۲۰^{۲}}{۴} = ۳۱۴\ mm^{۲}$$

$$E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta L = \frac{P.\ L}{A.\ E} = \frac{۴۷۱۰۰۰\times۸۰۰}{۳۱۴\times۲\times۱۰^{۵}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = ۶\ mm}$$

نکته:

اگر در شکل (۷-۲) نیروی **P** فشاری باشد، این نیرو سبب کاهش طول میلهٔ می‌گردد که مقدار آن از همان رابطهٔ (۷-۲) محاسبه می‌شود.

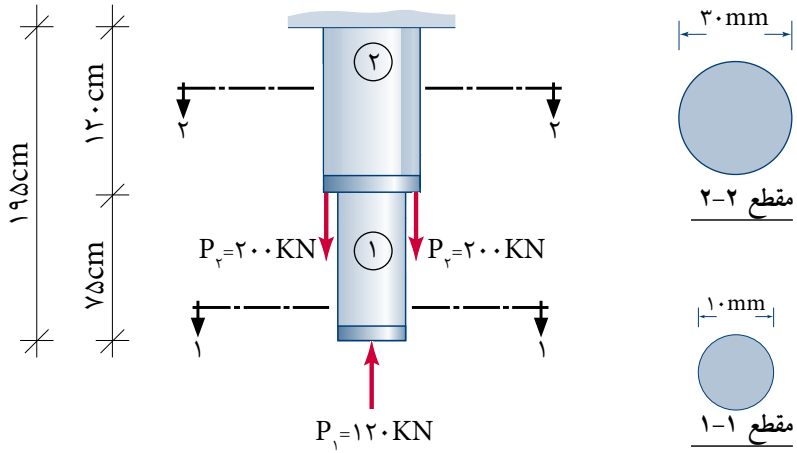
چنانچه جسم دارای مقطع و یا جنس یکنواخت نباشد و یا بارگذاری در نقاط مختلف انجام شود در این صورت آن‌را به بخش‌های مختلف تقسیم نموده و تغییر طول هر بخش را مطابق رابطهٔ (۷-۲) محاسبه می‌کنیم و برای محاسبه تغییر طول نهایی جسم آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم یعنی:

$$\Delta L = \sum_{i=۱}^{n} \frac{P_i.\ L_i}{A_i.\ E_i} \qquad (۷-۳)$$

مثال ۵

تغییر طول کلی جسم فولادی مطابق شکل زیر را محاسبه کنید.

$$(E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}})$$



حل:

تغییر طول کلی جسم برابر است با جمع جبری تغییر طول هر یک از قطعات ① و ② یعنی:

$$\Delta L_t = \Delta L_۱ + \Delta L_۲$$

الف) تغییر طول قطعه شماره ۱:

$P_۱ = -۱۲۰\ KN = -۱۲۰۰۰۰\ N$ **نیروی P فشاری می‌باشد.**

$L_۱ = ۷۵\ cm = ۷۵۰\ mm$

$$A_۱ = \frac{\pi D_۱^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴\times۱۰^{۲}}{۴} = ۷۸/۵\ mm^{۲}$$

$$E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta L_۱ = \frac{P_۱ . L_۱}{A_۱ . E_۱} = \frac{-۱۲۰۰۰۰\times۷۵۰}{۷۸/۵\times۲\times۱۰^{۵}}$$

$$\boxed{\Delta L_۱ = -۵/۷۳\ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول قطعهٔ ① کاهش می‌یابد.

ب) تغییر طول قطعه شماره ۲:

$$P_۲ = ۲۰۰ + ۲۰۰ - ۱۲۰ = ۲۸۰ \ KN = ۲۸۰۰۰۰ \ N$$

$$L_۲ = ۱۲۰ \ cm = ۱۲۰۰ \ mm$$

$$A_۲ = \frac{\pi \, D_۲^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۳۰^{۲}}{۴} = ۷۰۶/۵ \ mm^{۲}$$

$$E = ۲ \times ۱۰^{۵} \ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta L_۲ = \frac{P_۲ . \ L_۲}{A_۲ . \ E_۲} = \frac{۲۸۰۰۰۰ \times ۱۲۰۰}{۷۰۶/۵ \times ۲ \times ۱۰^{۵}}$$

$$\boxed{\Delta L_۲ = ۲/۳۸ \ mm}$$

افزایش طول قطعهٔ ②

تغییر طول کلی جسم برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_۱ + \Delta L_۲ = -۵/۷۳ + ۲/۳۸ \Rightarrow \boxed{\Delta L_t = -۳/۳۵ \ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول کل جسم کاهش می‌یابد.

خلاصهٔ فصل

- اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف، رفتارهای متفاوتی مانند رفتار کششی، فشاری، برشی و ... از خود نشان می‌دهند.
- نیروی محوری نیرویی است که در امتداد محور طولی اجسام و عمود بر سطح مقطع آن‌ها وارد می‌شود.
- نیروی وارد به واحد سطح را تنش می‌نامند.
- تنش محوری با رابطهٔ $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ تعریف می‌شود و بر سطح مقطع جسم عمود است.
- واحد تنش در سیستم **SI** عبارت است از $\frac{N}{m^{۲}}$.
- نیروهای محوری در اجسام، کاهش یا افزایش طول ایجاد می‌نمایند که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta L = \frac{P . \ L}{A . \ E}$$

- تغییر طول کلی اجسام از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

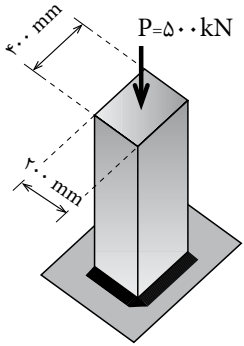
$$\Delta L = \sum_{i=۱}^{n} \frac{P_i . \ L_i}{A_i . \ E_i}$$

- ضریب ارتجاعی یا مدول الاستیسیته اجسام به جنس آن‌ها بستگی داشته و با نماد **E** نمایش داده می‌شود و واحد آن، واحد تنش یعنی $\frac{N}{mm^{۲}}$ یا **MPa** می‌باشد.

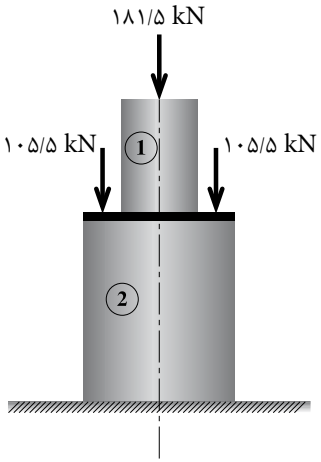
خودآزمایی

۱- لوستری به وزن **kN** ۵۰ از کابلی به قطر ۳۰ میلی‌متر آویزان است. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش محوری کابل.

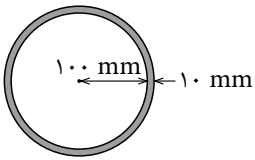
۲- ستونی مطابق شکل زیر تحت تأثیر بار محوری ۵۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف‌نظر شود).



۳- ستونی از جنس بتن با مقطع دایره مطابق شکل تحت تأثیر سه نیرو قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ قطر هر یک از دو عضو فوقانی و تحتانی، در صورتی که خواسته باشیم تنش در هر عضو از **MPa** ۸ تجاوز نکند (از وزن اعضا صرف‌نظر شود).



۴- باری محوری برابر **kN** ۶۰۰ بر ستونی فلزی از لوله با ضخامت جداره ۱۰ میلی‌متر و قطر داخلی **mm** ۲۰۰ اثر می‌کند. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش فشاری در ستون.



۵- نیرویی برابر **kN** ۱۰۰۰ بر یک صفحهٔ کف‌ستون (**Base Plate**) وارد می‌شود. اگر تنش زیر صفحه **MPa** ۵ باشد، مطلوب‌است محاسبهٔ ابعاد کف‌ستون در صورتی‌که، صفحهٔ کف‌ستون:

الف) مربع باشد

ب) نسبت طول به عرض آن ۱/۵ باشد

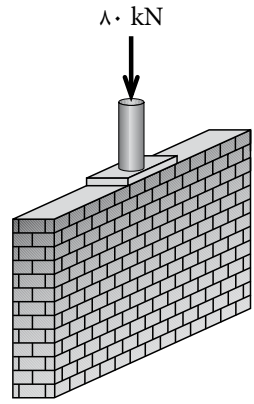
ج) دایره باشد.

۶- یک ستونک فلزی به قطر **mm** ۱۰۰ نیرویی برابر **kN** ۸۰ را مطابق شکل به‌وسیلهٔ صفحه کف‌ستون بر روی دیواری به ضخامت ۲۰۰ میلی‌متر وارد می‌کند. در صورتی‌که در نظر باشد تنش در زیر صفحه، حداکثر به **MPa** ۱ محدود شود، مطلوب‌است محاسبهٔ:

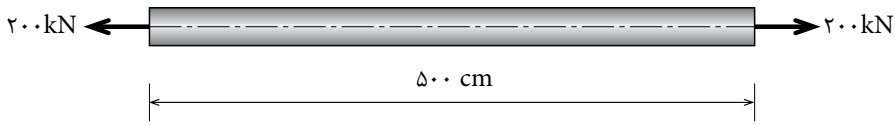
الف) ابعاد صفحه کف‌ستون؛

ب) تنش در مقطع ستونک؛

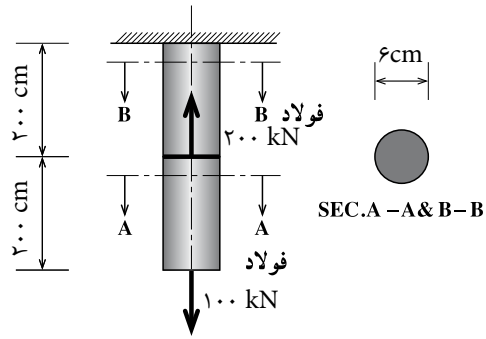
ج) تنش در زیر دیوار در صورتی‌که طول دیوار **m** ۱ باشد (از وزن دیوار صرف‌نظر شود).



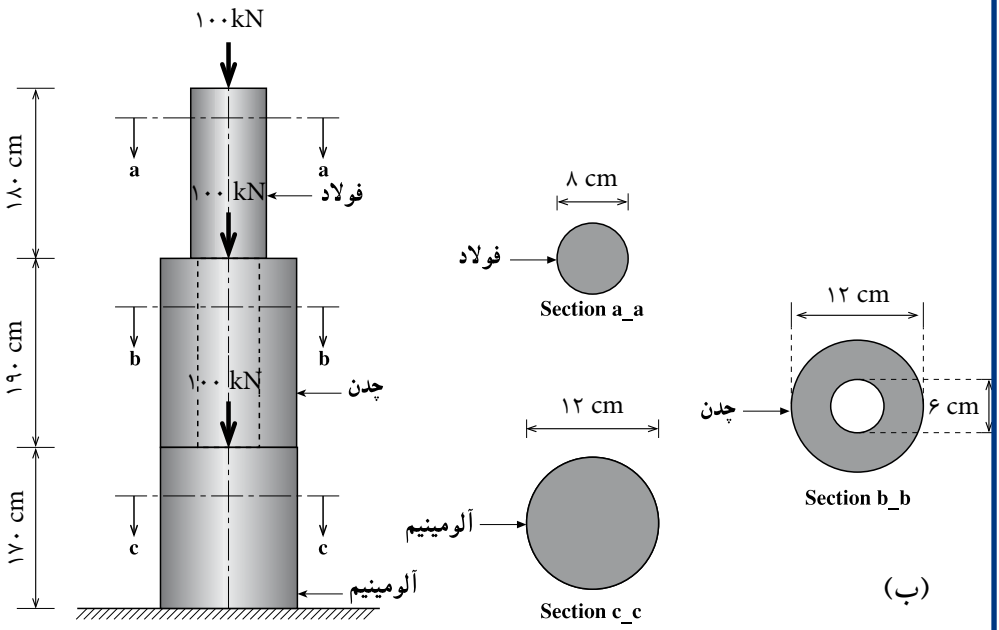
۷- در شکل زیر اگر مقطع میله دایره‌ای به قطر **d** و جنس آن از فولاد باشد و خواسته‌باشیم $\Delta L = ۱/۵۹۲$ cm باشد، مطلوب‌است محاسبهٔ قطر میله (**d**). ($E = ۲\times۱۰^{۵}$ MPa)



۸- در شکل‌های زیر تغییر طول نهایی هر کدام را محاسبه کنید.
(مقادیر مدول الاستیسیته را از جدول (۷-۱) استخراج نمائید)

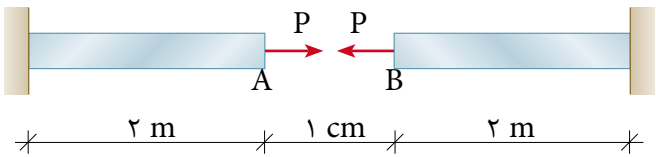


(الف)



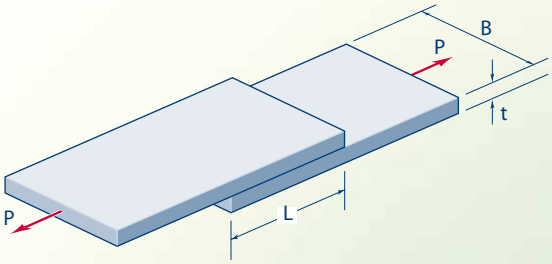
(ب)

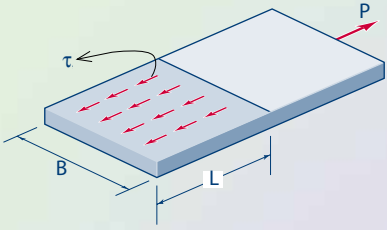
۹- در شکل زیر چه مقدار نیروی **P** به انتهای میله‌ها وارد شود تا نقاط **A** و **B** به‌هم برسند؟ قطر میله‌ها ۲۰ میلی‌متر و مدول الاستیسیته آن‌ها 2×10^5 **MPa** می‌باشد.



فصل
هشتم

نیرو
و
تنش برشی





هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- نیروی برشی (مماسی) را تعریف کند.

۲- تنش برشی را تعریف نماید و رابطهٔ آن‌را به‌کار گیرد.

۳- رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ را بررسی نماید .

۴- تنش کششی ماکزیمم در اتصالات برشی ساده را محاسبه نماید.

۵- تنش لهیدگی را در اتصالات برشی ساده محاسبه کند.

۶- تنش برشی در پیچ‌ها و یا پرچ‌ها را به‌دست آورد.

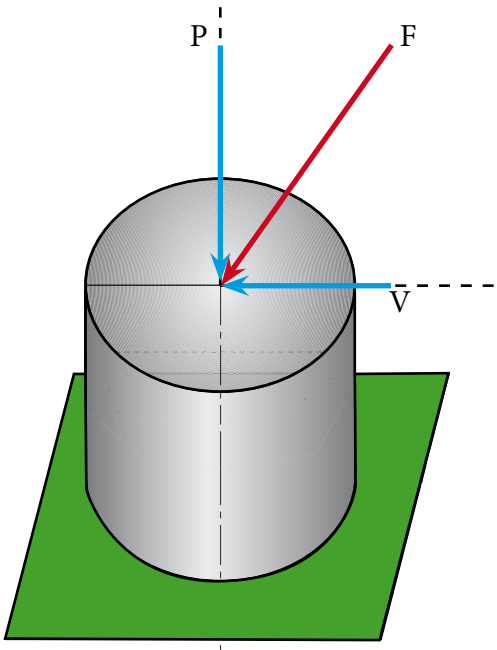
۷- گسیختگی برشی ورق‌ها را کنترل نماید.

۸-۱ نیروی برشی (مماسی)

نیروی مماس بر سطح مقطع اجسام را نیروی برشی (مماسی) می‌نامیم.

در شکل (۸-۱) نیروی **F** به سطح مقطع **A** وارد می‌شود.

اگر نیروی **F** را به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه نمائیم، مؤلفهٔ افقی آن (**V**) بر سطح مقطع مماس می‌باشد. بنابراین نیروی برشی محسوب می‌شود و مؤلفهٔ قائم (**P**) بر سطح مقطع عمود بوده و لذا نیروی محوری محسوب می‌گردد.



شکل ۸-۱

۲-۸ تنش‌های برشی (مماسی) (Shear Stress)

نیروی برشی سبب ایجاد تنش برشی در سطح مقطع اجسام می‌گردد. شکل (۸-۲-الف) دو صفحه را نشان می‌دهد که به‌وسیلهٔ چسب به یکدیگر متصل شده‌اند و نیروی **P** تنش برشی در محل اتصال دو صفحه مطابق شکل (۸-۲-ب) ایجاد می‌نماید.

تنش برشی (مماسی)

نیروی برشی (مماسی) وارد به واحدِ سطح را تنشِ برشی گویند

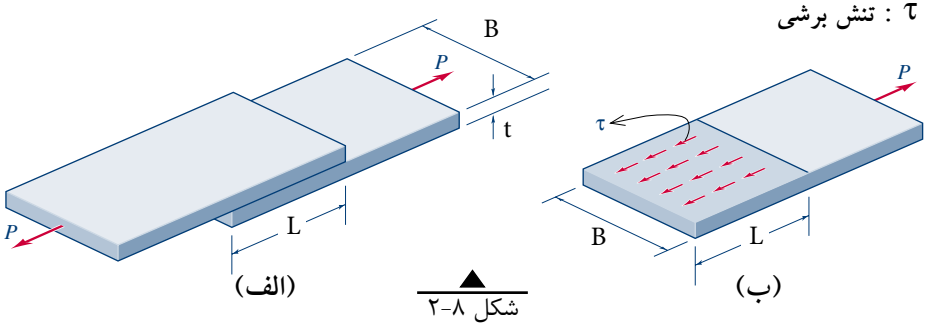
و با نماد (τ) نمایش داده می‌شود و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\tau = \frac{V}{A} \qquad (۸-۱)$$

V : نیروی برشی که در شکل (۸-۲) همان نیروی **P** می‌باشد.

A : سطح مقطع جسم (که در این‌جا سطح تماس بین دو صفحه می‌باشد A=L.B)

τ : تنش برشی

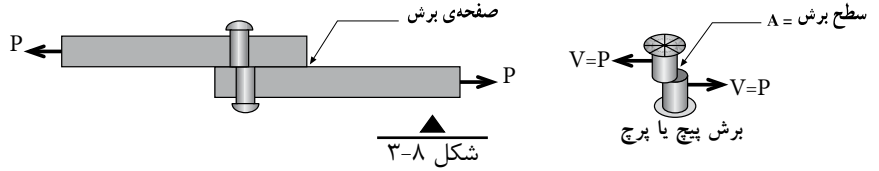


شکل ۸-۲

نیروی برشی در اکثر سازه‌های ساختمانی به صورت‌های مختلف وجود دارد و به دلیل گستردگی و پیچیدگی موضوع در اینجا تنها جهت آشنایی با رفتار برشی اعضای ساختمانی به بررسی اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ می‌پردازیم.

در شکل (۸-۳) دو ورق با مشخصات نشان‌داده‌شده توسط یک پیچ به قطر **d** به یکدیگر متصل شده‌اند و تحت تاثیر نیروی کششی **P** قرار دارند.

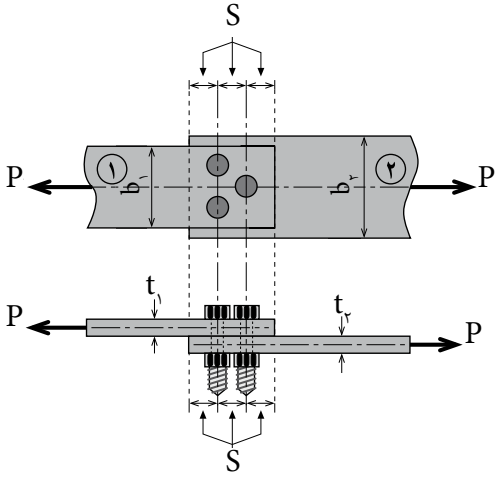
باتوجه به شکل (۸-۳) ملاحظه می‌شود که نیروی **P** در ورق‌ها ایجاد کشش نموده و در پیچ‌ها ایجاد برش می نماید. لذا نیروی **P** برای پیچ، نیروی برشی محسوب می‌گردد.



شکل ۸-۳

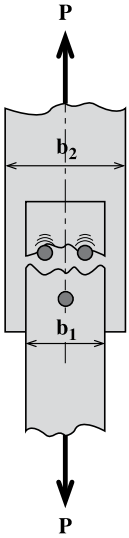
۸-۳ بررسی رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ

با توجه به شکل (۸-۴) به بررسی رفتارهای مختلف این نوع اتصالات می‌پردازیم:



شکل ۸-۴

۸-۳-۱- تنش کششی حداکثر ایجاد شده در ورق‌ها



شکل ۸-۵

با توجه به رابطهٔ ($\sigma = \frac{P}{A}$) تنش محوری یا قائم ورق‌ها وقتی به حداکثر می‌رسد که سطح مقطع کاهش یابد لذا در محل پیچ یا پرچ به دلیل وجود سوراخ‌ها، سطح مقطع ورق ضعیف شده و تنش حداکثر در آن مقطع ایجاد می‌شود و امکان گسیختگی در این مقطع وجود دارد[۱] و مطابق شکل خواهیم داشت: شکل (۸-۵)

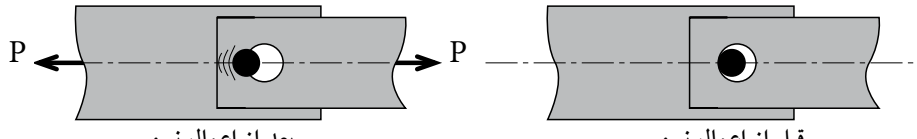
$$A = (b - nd)t \qquad (۸-۲)$$

بنابراین برای تعیین کمترین سطح مقطع ورق‌ها (A_{min}) لازم است مقاطع مختلفی در طول اتصال در نظر گرفته و سطح مقطع هرکدام را محاسبه نموده و کمترین آن‌ها را در رابطهٔ $\sigma = \frac{P}{A}$ قرار دهیم تا مقدار حداکثر تنش کششی تعیین شود. دررابطه (۸-۲) **n** تعداد پیچ‌ها در مقطع مورد نظر و **d** قطر پیچ‌ها یا پرچ‌ها، **b** عرض و **t** ضخامت صفحه‌ها می‌باشد.

۱- باید توجه داشت که در این‌گونه اتصالات ممکن‌است مقاطع دیگری وجود داشته باشند که تنش کششی حداکثر در آن‌ها ایجاد می‌شود که در مقاطع بالاتر با آن‌ها آشنا خواهید شد.

۸-۳-۲- تنش لهیدگی

نیروی کششی اعمال شده در اتصال شکل (۸-۶) در محل سوراخ‌ها به جدارهٔ ورق‌ها توسط پیچ فشار وارد می‌آورد که باعث لهیدگی سطح تماس آن‌ها می‌شود و تنش حاصل، تنش لهیدگی نامیده می‌شود و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.



شکل ۸-۶

$$\sigma_b = \frac{P}{Ndt} \qquad (۸-۳)$$

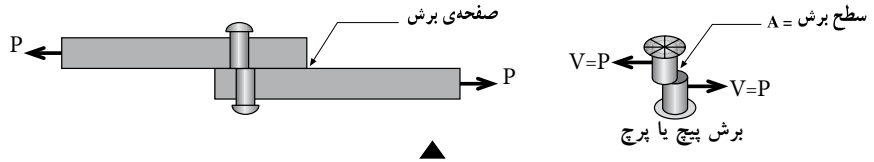
بدیهی است که تنش لهیدگی حداکثر ($\sigma = b_{max}$)در صفحه‌ای ایجاد می‌شود که کمترین ضخامت (t_{min})را داشته باشد. یعنی:

$$\sigma_{bmax} = \frac{P}{Ndt_{min}} \qquad (۸-۴)$$

در روابط (۸-۳) و (۸-۴)، **N** تعداد کل پیچ‌ها یا پرچ‌های اتصال می‌باشد.

۸-۳-۳- تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها

باتوجه به تعریف نیروی برشی (مماسی)، نیروی کششی **P** در اتصال شکل (۸-۷) بر سطح مقطع پیچ‌ها یا پرچ‌ها مماس بوده بنابراین نیروی برشی برای پیچ‌ها یا پرچ‌ها محسوب می‌شود:



شکل ۸-۷

لذا باتوجه به رابطهٔ تنش برشی داریم:

$$\tau = \frac{P}{NA} \qquad (۸-۵)$$

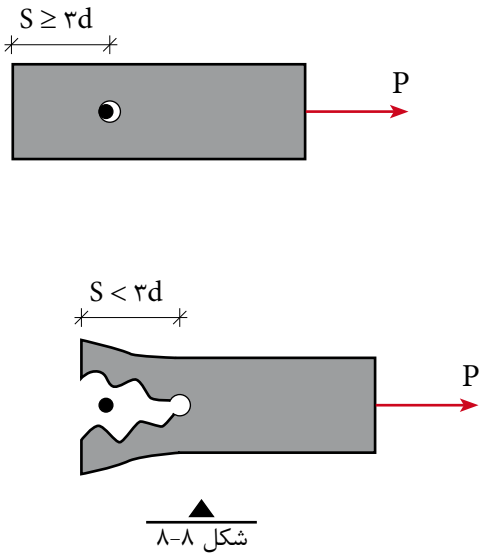
در این رابطه **N** تعداد کل پیچ‌ها یا پرچ‌ها و **A** سطح مقطع یکی از آن‌ها می‌باشد.

۸-۳-۴- گسیختگی برشی ورق

هرگاه فاصله مراکز سوراخ‌ها از یکدیگر و یا از لبه‌های ورق، از حد معینی کمتر باشد، امکان پارگی ورق مطابق شکل (۸-۸) وجود دارد.

لذا بر اساس آیین‌نامه باید فاصلهٔ مرکز تا مرکز سوراخ‌ها و همچنین مرکز سوراخ‌ها تا لبه‌های ورق از سه برابر قطر پیچ کمتر نباشد. یعنی:

$$S \geq 3d \qquad (۶-۸)$$



شکل ۸-۸

مثال ۱

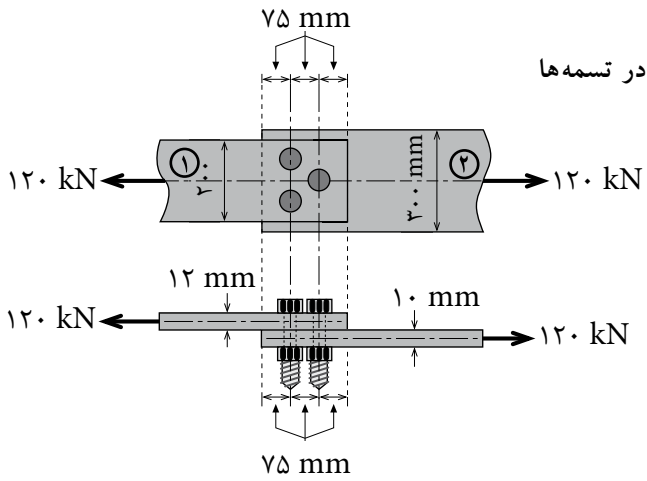
دو تسمه توسط سه پیچ هر یک به قطر ۲۰ میلی‌متر مطابق شکل به‌هم متصل شده‌اند. مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) تنش کششی حداکثر در هر تسمه

ب) تنش برشی پیچ‌ها

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم در تسمه‌ها

د) کنترل پارگی برشی



الف) سطح مقطع هر تسمه را در مقطعی که بیشترین پیچ‌ها در آن وجود دارند محاسبه سپس تنش را در هر تسمه به‌دست می‌آوریم:

تسمهٔ ۱

$$A_{min} = (b_1 - nd)t_1 \Rightarrow A_{min} = (۲۰۰ - ۲\times ۲۰)۱۲$$

$$A_{min} = ۱۹۲۰ \ mm^۲$$

تنش

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_{min}} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{۱۲۰\times ۱۰^۳}{۱۹۲۰}$$

$$\boxed{\sigma_1 = ۶۲/۵ \ MPa}$$

تنش حداکثر در تسمه شمارهٔ (۱)

تسمهٔ ۲

$$A_{min} = (b - nd)t \Rightarrow A_{min} = (۳۰۰ - ۲\times ۲۰)۱۰$$

$$A_{min} = ۲۶۰۰ \ mm^۲$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A_{min}} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{۱۲۰\times ۱۰^۳}{۲۶۰۰}$$

$$\boxed{\sigma_2 = ۴۶/۱۵ \ MPa}$$

تنش حداکثر در تسمه شمارهٔ (۲)

ب) تنش برشی در پیچ‌ها:

$$\tau = \frac{P}{NA} \Rightarrow \tau = \frac{۱۲۰\times۱۰^{۳}}{۳\times(\frac{\pi}{۴}\times۲۰^{۲})} \Rightarrow \boxed{\tau = ۱۲۷/۳۹ \quad MPa}$$

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم در تسمه (۲) به‌وجود می‌آید. چون دارای ضخامت کمتری نسبت به تسمه شماره (۱) می‌باشد.

$$\sigma_{b\,max} = \frac{P}{Ndt_{min}} \Rightarrow \sigma_b = \frac{۱۲۰\times۱۰^{۳}}{۳\times(۲۰\times۱۰)} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = ۲۰۰ \quad MPa}$$

د) کنترل پارگی برشی:

برای جلوگیری از پارگی تسمه باید:

$S \geq ۳d \Rightarrow ۷۵ \geq ۳\times۲۰ \Rightarrow ۷۵ > ۶۰$ قابل قبول

خلاصهٔ فصل

- نیروی برشی یا مماسی به نیرویی گفته می‌شود که بر سطح مقطع جسم مماس باشد.
- تنش برشی از رابطهٔ $\tau = \frac{V}{A}$ محاسبه می‌شود.
- اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ، در حالات زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

۱) تنش کششی ایجاد شده در تسمه‌ها در مقطع ضعیف‌شده برابر است با:

$$\sigma = \frac{P}{(b-nd)t}$$

۲) تنش لهیدگی حداکثر در محل سوراخ‌ها و در تسمه نازک‌تر ایجاد می‌شود. یعنی:

$$\sigma_{b\,max} = \frac{P}{Ndt_{min}}$$

۳) تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau = \frac{P}{NA} \qquad A = \frac{\pi d^{۲}}{۴}$$

۴) به منظور جلوگیری از گسیختگی برشی تسمه‌ها باید فاصلهٔ سوراخ‌ها از یکدیگر و از لبهٔ ورق‌ها از سه برابر قطر پیچ یا پرچ کمتر نباشد. یعنی:

$$S \geq ۳d$$

خودآزمایی

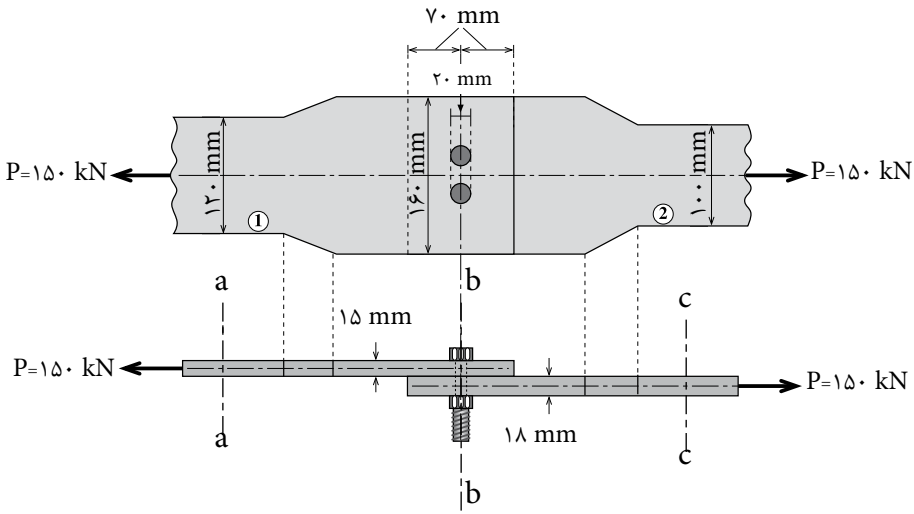
۱- در شکل زیر مطلوب‌است محاسبهٔ

الف) تنش کششی در مقاطع **a–a** و **b–b** و **c–c**

ب) تنش برشی پیچ‌ها

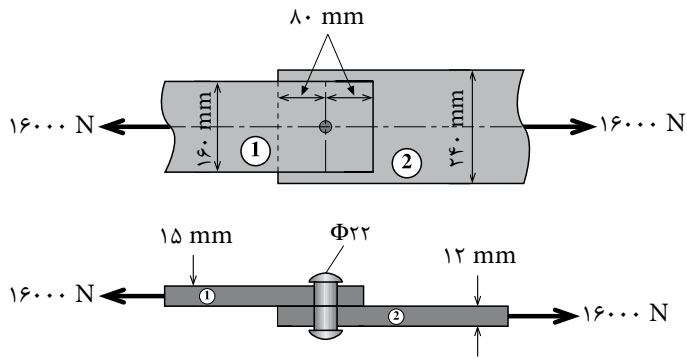
ج) تنش لهیدگی ماکزیمم

د) کنترل پارگی برشی

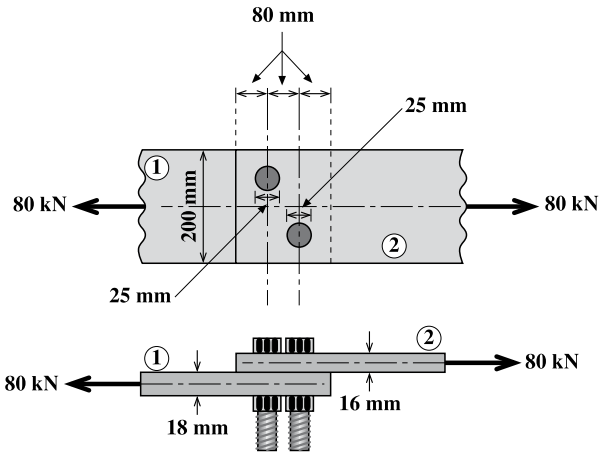


۲- در مسائل ۲ و ۳ مطلوب‌است محاسبهٔ:

تنش ماکزیمم صفحه‌ها - تنش برشی پیچ‌ها - تنش لهیدگی ماکزیمم و کنترل پارگی برشی

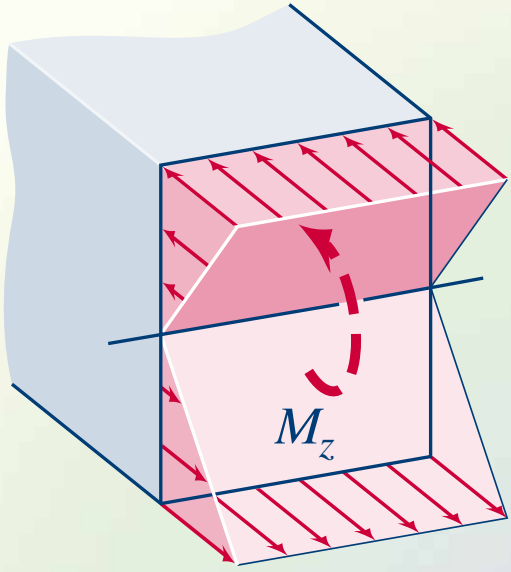


-۳



فصل
نهم

تنش
در تیرها



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- تنش خمشی را در تیرها بشناسد.

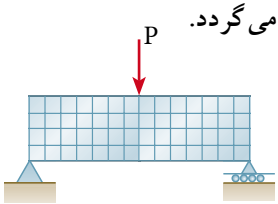
۲- تنش خمشی حداکثر در هر مقطع از تیر با مقاطع متقارن را با بار متمرکز محاسبه کند.

۳- حداکثر تنش خمشی تیرها با مقاطع متقارن را با بار متمرکز به‌دست آورد.

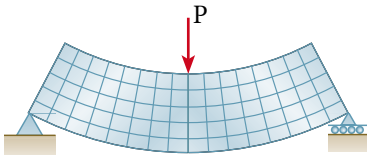
۴- شماره مقطع مورد نیاز تیرها تحت بار متمرکز را به کمک رابطهٔ خمش، با استفاده از پروفیل‌های استاندارد تک یا دوبل به‌دست آورد.

۹-۱ تنش خمشی در تیرها با مقطع متقارن

در شکل (۹-۱) تیر با بارگذاری نشان داده شده، به صورت شکل (۹-۲) خم می‌گردد.



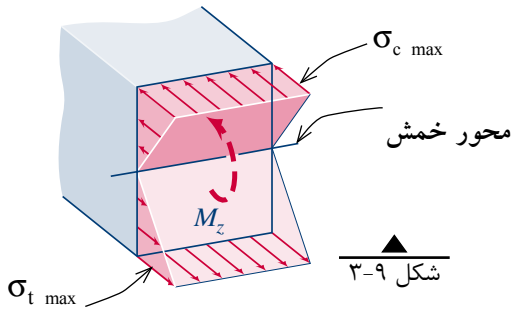
شکل ۹-۱



شکل ۹-۲

ملاحظه می‌شود که تارهای تحتانی تیر کشیده شده و تارهای فوقانی آن فشرده می‌شود بنابراین در هر مقطع این تیر، ناحیه تحتانی دارای تنش کششی و ناحیه فوقانی دارای تنش فشاری می‌باشد که به تنش‌های مذکور تنش‌های خمشی گفته می‌شود.

حداکثر تنش‌های کششی (σ_t) و فشاری (σ_c) ایجادشده در مقطع تیر مطابق شکل (۹-۳) به‌ترتیب در تارهای تحتانی و فوقانی خواهد بود.



شکل ۹-۳

مقدار این تنش‌ها از رابطهٔ (۹-۱) محاسبه می‌گردد که به رابطهٔ خمش معروف است:

$$\sigma = \frac{MC}{I} \qquad (۹-۱)$$

در این رابطه:

M : لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

C : فاصلهٔ دورترین تارهای کششی یا فشاری مقطع از محور خمش

I : ممان اینرسی حول محور خمش تیر می‌باشد.

σ : تنش کششی (σ_t) و یا فشاری (σ_c) حداکثر، در مقطع مورد نظر می‌باشد که در مقاطع متقارن با هم برابرند.

۹-۱-۱- تنش‌های خمشی حداکثر در تیر

رابطهٔ (۹-۱) مقادیر حداکثر تنش کششی یا فشاری (σ_{max})در هر مقطع دلخواه از تیر را تعیین می‌کند.

برای محاسبه حداکثر تنش کششی یا فشاری در طول تیر لازم است در رابطه (۹-۱) لنگر خمشی حداکثر تیر (M_{max}) را از نمودار لنگر خمشی تیر جایگزین نمائیم. یعنی:

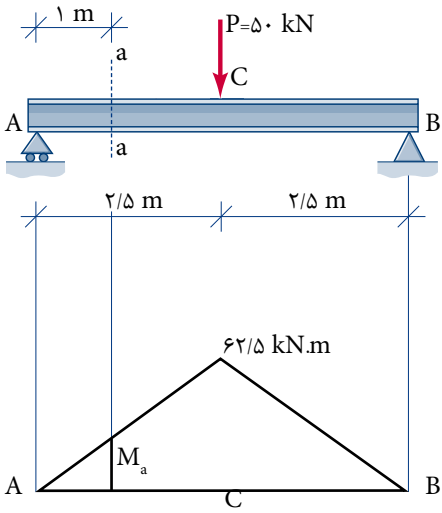
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I} \qquad (۹-۲)$$

مثال ۱

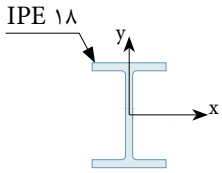
در تیر شکل مقابل که متشکل از یک IPE ۱۸۰ mm می‌باشد، با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) تنش خمشی حداکثر در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ

ب) تنش خمشی حداکثر تیر



نمودار لنگر خمشی تیر (M)



مقطع تیر

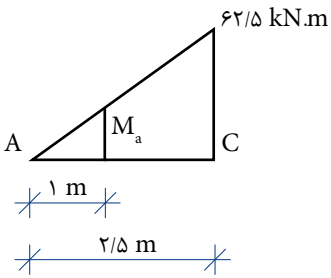
حل:

الف) مقدار لنگر خمشی در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱ متر از تکیه‌گاه سمت چپ با توجه به نمودار لنگر خمشی و استفاده از تناسب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{M_a}{۶۲/۵}=\frac{۱}{۲/۵}\Rightarrow M_a=\frac{۶۲/۵}{۲/۵}$$

$$M_a=۲۵\ \text{kN.m}$$

$$\boxed{M_a=۲۵\times۱۰^{۶}\ \text{N.mm}}$$



تنش خمشی ماکزیمم در مقطع a–a از رابطهٔ خمش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma=\frac{M_a C}{I_x}$$

با استخراج مشخصات IPE ۱۸ از جداول پیوست خواهیم داشت:

$$\text{IPE }۱۸\begin{cases} I_x = ۱۳۲۰\ cm^۴ = ۱۳۲\times ۱۰^۵\ mm^۴ \\ C = \dfrac{h}{۲} = \dfrac{۱۸۰}{۲} = ۹۰\ mm \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{۲۵\times ۱۰^۶ \times ۹۰}{۱۳۲\times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\sigma = ۱۷۰/۴۵\ MPa}$$

ب) تنش خمشی حداکثر تیر با توجه به مقدار لنگر ماکزیمم تیر از روی نمودار لنگر خمشی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$M_{max} = ۶۲/۵\ kN.m = ۶۲/۵\times ۱۰^۶\ N.mm$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{۶۲/۵\times ۱۰^۶ \times ۹۰}{۱۳۲\times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = ۴۲۶/۱۴\ MPa}$$

۹-۲ تنش برشی متوسط تیرهای با مقطع I شکل (مطالعه آزاد)

در فصل پنجم با نمودارهای نیروی برشی (V) و لنگر خمشی (M) تیرها آشنا شدیم. بر اساس این نمودارها، هر نقطه از تیر دارای مقدار معینی نیروی برشی و لنگر خمشی می‌باشد.

تیرها باید مقادیر حداکثر نیروی برشی (V_{max})و لنگر خمشی (M_{max}) ایجادشده را تحمل نمایند.

در تیرهای I شکل، جانِ تیر سهم بیشتری در تحمل نیروهای برشی دارد بنابراین برای محاسبهٔ تنش برشی در تیرها، در رابطهٔ ($\tau = \frac{V}{A}$) که در فصل هشتم آمده است، سطح جان تیر را قرار می‌دهیم.

لذا تنش برشی متوسط (τ_{ave}) در تیرها از رابطهٔ (۹-۳) به‌دست می‌آید.

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A_w} \qquad (۹-۳)$$

که A_w مطابق شکل (۹-۴) برابر است با:

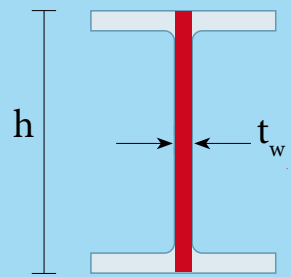
$$A_w = h.t_w \qquad (۹-۴)$$

در این رابطه:

(h) ارتفاع مقطع تیرآهن و (t_w) ضخامت جانِ تیر می‌باشد که از جداول مربوطه استخراج می‌گردد.

برای محاسبهٔ تنش برشی حداکثر (τ_{max}) در تیر باید به جای V در رابطهٔ (۹-۳) از V_{max} استفاده شود.

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{h.t_w} \qquad (۹-۵)$$



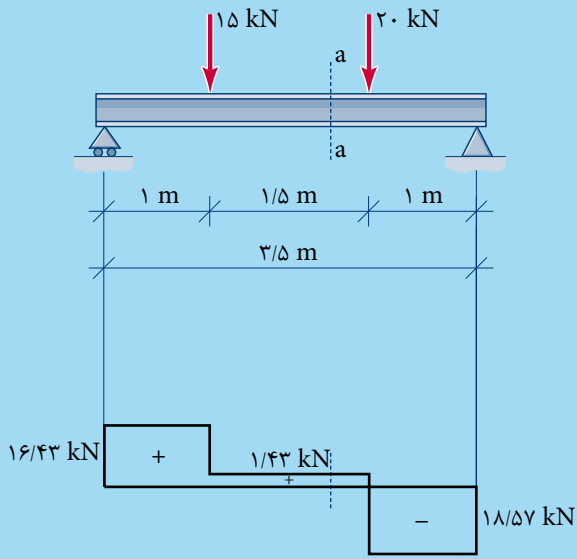
شکل ۹-۴

مثال ۲ (مطالعه آزاد)

در تیر شکل مقابل که از یک تیرآهن IPE ۱۶ تشکیل شده است، با توجه به نمودار نیروی برشی تیر مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) تنش برشی تیر در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱/۵ متر از تکیه‌گاه سمت راست؛

ب) تنش برشی حداکثر تیر.



نمودار نیروی برشی (V)

حل:

الف) با توجه به نمودار نیروی برشی، در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱/۵ متر از تکیه‌گاه سمت راست، مقدار نیروی برشی برابر است با $V_a = ۱/۴۳\ kN$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\tau_a = \frac{V}{A_w}$$

با استخراج سطح مقطع جان تیرآهن IPE ۱۶ از جداول پیوست، داریم:

$$\text{IPE } ۱۶ \begin{cases} h = ۱۶\ cm = ۱۶۰\ mm \\ t_w = s = ۵\ mm \end{cases} \Rightarrow A_w = h.t_w \Rightarrow A_w = ۱۶۰ \times ۵ = ۸۰۰\ mm^۲$$

$$\tau_a = \frac{۱/۴۳ \times ۱۰^۳}{۸۰۰} \Rightarrow \boxed{\tau_a = ۱/۷۹\ MPa}$$

تنش برشی در مقطع a–a

ب) تنش برشی حداکثر تیر:

با توجه به نمودار نیروی برشی داریم:

$$V_{max} = ۱۸/۵۷\ kN = ۱۸۵۷۰\ N$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{h.t_w} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{۱۸۵۷۰}{۸۰۰}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{max} = ۲۳/۲۱\ MPa}$$

تنش برشی حداکثر تیر

۳-۹ تعیین شمارهٔ مقطع تیر فولادی با استفاده از تنش خمشی ماکزیمم تحت بار متمرکز

به‌طور کلی طراحی تیر یعنی تعیین مشخصات مقطع مورد نیاز با توجه به بارهای وارده و کنترل‌های لازم مانند کنترل تنش برشی حداکثر، کنترل تغییر شکل و . . . که با استفاده از آئین‌نامه‌های مربوطه انجام می‌گیرد.

در این قسمت با روش تعیین شماره مقطع مورد نیاز تیر فولادی با استفاده از رابطهٔ (۹-۲) آشنا می‌شوید و کنترل‌های لازم را در مقاطع بالاتر فرا خواهید گرفت.

تنش خمشی حداکثر تیر که عموماً تعیین‌کننده شماره مقطع مورد نیاز آن می‌باشد از رابطهٔ (۹-۲) به‌دست می‌آید.

به‌طور کلی تنش ایجاد شده در هر مصالحی نباید از مقدار معینی تجاوز نماید که این مقدار تنش معین را تنش مجاز مصالح مورد نظر می‌نامند.

مقدار تنش مجاز توسط آئین‌نامه‌های مربوطه مشخص شده و با نماد σ_{all} نشان داده می‌شود. در این کتاب مقدار تنش مجاز مصالح فولادی در خمش معادل **MPa** ۱۴۴ در نظر گرفته شده است.[۱]

بنابراین تنش خمشی حداکثر در تیرهای فولادی نباید از **MPa** ۱۴۴ تجاوز نماید در نتیجه رابطهٔ (۹-۲) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}.C}{I_x} \le ۱۴۴ \ MPa$$

نسبت $\frac{I_x}{C}$ ، مدول مقطع یا اساس مقطع تیر یعنی (S_x) می‌باشد.

بنابراین در رابطهٔ (۹-۳) خواهیم داشت:

$$S_x = \frac{I_x}{C}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{\frac{I_x}{C}} \le ۱۴۴ \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S_x} \le ۱۴۴$$

$$\Rightarrow \boxed{S_x \ge \frac{M_{max}}{۱۴۴}} \qquad (۴-۹)$$

۱- مقدار تنش مجاز به عوامل مختلفی بستگی دارد که به منظور سادگی و پرهیز از طولانی شدن بحث به طور خلاصه آن‌را معادل **MPa** ۱۴۴ در نظر می‌گیریم.

«به مقدار S_x حاصل از رابطهٔ (۹-۴) اساس مقطع لازم گویند.» بنابراین برای تعیین شمارهٔ مقطع تیر با استفاده از رابطهٔ (۹-۴) اساس مقطع لازم تیر، محاسبه شده و از جداول پروفیل‌های ساختمانی می‌توان شمارهٔ مقطع مورد نیاز را که دارای اساس مقطعی معادل یا بزرگ‌تر از مقدار محاسبه شده از رابطهٔ فوق می‌باشد، استخراج می‌شود.

مثال ۳

کنترل نمائید در مثال (۱) آیا با توجه به تنش مجاز خمشی تیر که معادل **MPa** ۱۴۴ می‌باشد تیرآهن **IPE** ۱۸ جوابگوی بار وارده می‌باشد یا خیر و در صورت لزوم مقطع مورد نیاز را تعیین نمائید.

حل:

تنش خمشی ماکزیمم در مثال (۱) برابر $\sigma_{max} = ۴۲۶/۱۴\ MPa$ محاسبه شده که بزرگ‌تر از تنش مجاز خمشی یعنی $\sigma_{all} = ۱۴۴\ MPa$ می‌باشد بنابراین **IPE** ۱۸ جوابگوی بار وارده نمی‌باشد.

بنابراین باید اساس مقطع مورد نیاز را محاسبه نمائیم. با توجه به رابطهٔ (۹-۴) خواهیم داشت:

$$S_{x\,لازم} \geq \frac{M_{max}}{۱۴۴}$$

$$\Rightarrow S_{x\,لازم} = \frac{۶۲/۵\times۱۰^{۶}}{۱۴۴} = ۴۳۴۰۲۷\ mm^{۳} = ۴۳۴۰۲۷\times۱۰^{-۳}\ cm^{۳}$$

$$\Rightarrow S_{x\,لازم} = ۴۳۴/۰۳\ cm^{۳} \Rightarrow \text{از جدول IPE} \Rightarrow \boxed{\text{IPE ۳۰}}$$

$$S_{x\,موجود} = ۵۵۷\ cm^{۳} > ۴۳۴/۰۳$$

بنابراین برای این‌که تنش خمشی ماکزیمم تیر از حد مجاز تجاوز نکند باید مقطع آن حداقل **IPE** ۳۰ باشد. چنان‌چه بخواهیم از تیرآهن دوبل به‌عنوان تیر فوق استفاده نمائیم، کافی‌است اساس مقطع لازم را نصف نموده و بر اساس آن شمارهٔ مقطع مورد نیاز را از جدول استخراج و به صورت دوبل مورد استفاده قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$S_{x\,لازم} \geq \frac{۴۳۴/۰۳}{۲} = ۲۱۷/۰۲\ cm^{۳}$$

$$\Rightarrow \text{از جدول IPE} \Rightarrow \boxed{۲\ \text{IPE ۲۲}} \quad \text{با} \quad S_{x\,موجود} = ۲۵۲\times۲ = ۵۰۴\ cm^{۳} > ۴۳۴/۰۳\ cm^{۳}$$

خلاصهٔ فصل

- در اثر خمش در تیر، تنش‌های کششی و فشاری ایجاد می‌شود.
- مقادیر تنش خمشی حداکثر در هر مقطع از تیر در تارهای فوقانی و تحتانی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

- تنش خمشی حداکثر تیر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I}$$

- تنش مجاز خمشی تیرهای فولادی برابر **MPa** ۱۴۴ در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma_{all} = ۱۴۴\ MPa$$

- برای تعیین اساس مقطع تیرآهن لازم از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود.

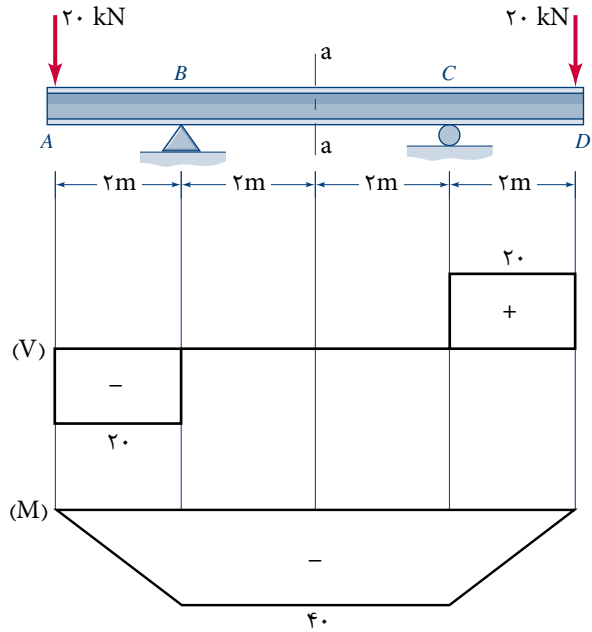
$$S_x \geq \frac{M_{max}}{۱۴۴}$$

خودآزمایی

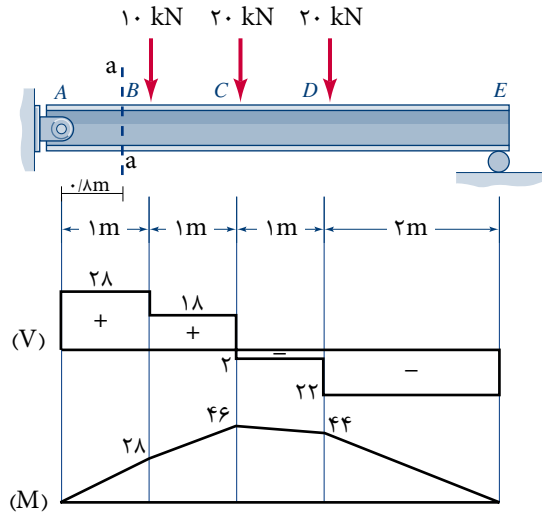
۱- در تیرهای داده‌شده مطلوب‌است:

الف) محاسبهٔ تنش خمشی در مقطع a-a

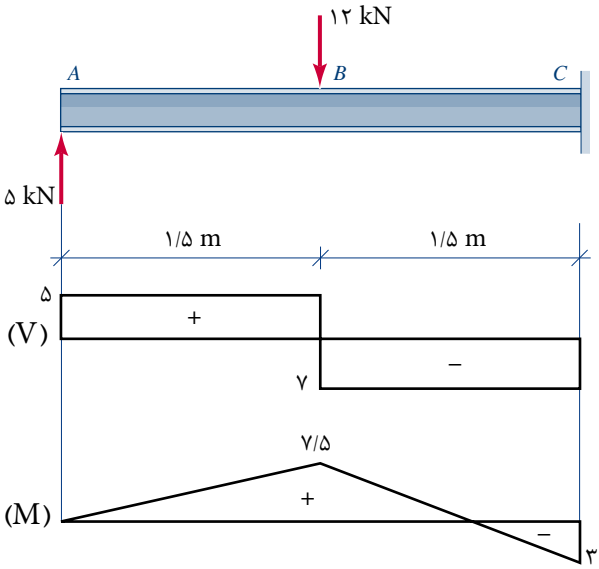
ب) محاسبهٔ تنش خمشی ماکزیمم تیر



(الف)

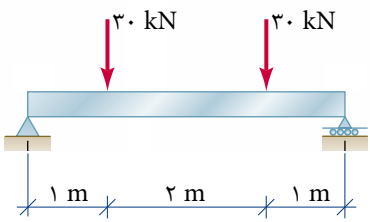


(ب)

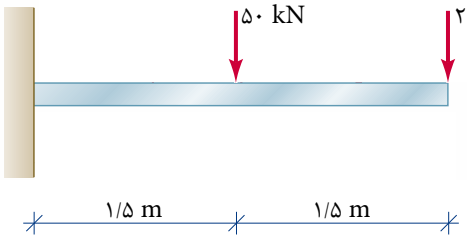


(ج)

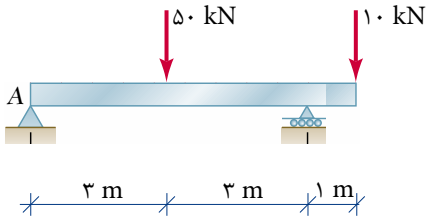
۲- شمارهٔ مقطع هر یک از تیرهای زیر را با استفاده از پروفیل **IPE** تک و دوبل تعیین کنید. (تنش مجاز خمشی فولاد را ۱۴۴ مگاپاسکال در نظر بگیرید.)



(الف)



(ب)

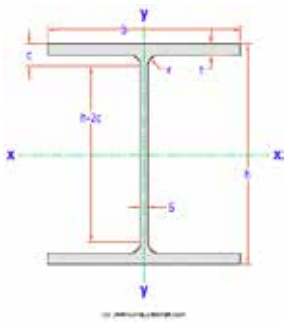


(ج)

ضمیمه:

جداول مشخصات نیم‌رخ‌های فولادی

نیمرخ بال پهن IPB



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

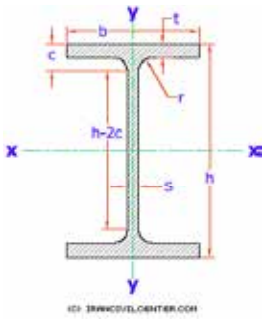
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

IPB	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	mm
100	100	100	6	10	12	22	56	26	20.4	450	89.9	4.16	167	33.5	2.53	27.8
120	120	120	6.5	11	12	23	74	34	26.7	864	144	5.04	318	52.9	3.06	33.4
140	140	140	7	12	12	24	92	43	33.7	1510	216	5.93	550	78.5	3.58	38.9
160	160	160	8	13	15	28	104	54.3	42.6	2490	311	6.78	889	111	4.05	44.4
180	180	180	8.5	14	15	29	122	65.3	51.2	3830	426	7.66	1360	151	4.57	49.9
200	200	200	9	15	18	33	134	78.1	61.3	5700	570	8.54	2000	200	5.07	55.5
220	220	220	9.5	16	18	34	152	91	71.5	8090	736	9.43	2840	258	5.59	61
240	240	240	10	17	21	38	164	106	83.2	11260	938	10.3	3920	327	6.08	66.6
260	260	260	10	17.5	24	41.5	177	118	93	14920	1150	11.2	5130	395	6.58	72.2
280	280	280	10.5	18	24	42	196	131	103	19270	1380	12.1	6590	471	7.09	77.6
300	300	300	11	19	27	46	208	149	117	25170	1680	13	8560	571	7.58	83.2
320	320	300	11.5	20.5	27	47.5	225	161	127	30820	1930	13.8	9240	616	7.57	83.1
340	340	300	12	21.5	27	48.5	243	171	134	36660	2160	14.6	9690	646	7.53	82.9
360	360	300	12.5	22.5	27	49.5	261	181	142	43190	2400	15.5	10140	676	7.49	82.7
400	400	300	13.5	24	27	51	298	198	155	57680	2880	17.1	10820	721	7.4	82.3
450	450	300	14	26	27	53	344	218	171	79890	3550	19.1	11720	781	7.33	81.9
500	500	300	14.5	28	27	55	390	239	187	107200	4290	21.2	12620	842	7.27	81.6
550	550	300	15	29	27	56	438	254	199	136700	4970	23.2	13080	872	7.17	81.1
600	600	300	15.5	30	27	57	486	270	212	171000	5700	25.2	13530	902	7.08	80.7
650	650	300	16	31	27	58	534	286	225	210600	6480	27.1	13980	932	6.99	80.2
700	700	300	17	32	27	59	582	306	241	256900	7340	29	14440	963	6.87	79.6
800	800	300	17.5	33	30	63	674	334	262	359100	8980	32.8	14900	994	6.68	78.7
900	900	300	18.5	35	30	65	770	371	291	494100	10980	36.5	15820	1050	6.53	77.9
1000	1000	300	19	36	30	66	868	400	314	644700	12890	40.1	16280	1090	6.38	77

نیمرخ نیم پهن IPE



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

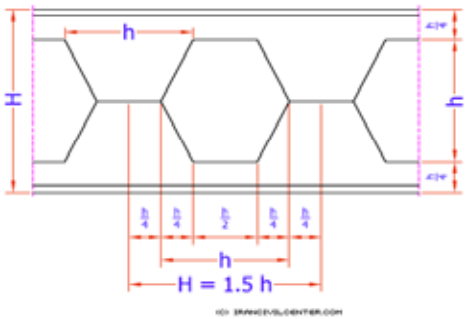
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	a_1	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1
360	360	170	8	12.7	18	30.7	298	72.7	57.1	16270	904	15	1040	123	3.79	294	44.7
400	400	180	8.6	13.5	21	34.5	331	84.5	66.3	23130	1160	16.5	1320	146	3.95	326	47.1
450	450	190	9.4	14.6	21	35.6	378	98.8	77.6	33740	1500	18.5	1680	176	4.12	365	49.4
500	500	200	10.2	16	21	37	426	116	90.7	48200	1930	20.4	2140	214	4.31	404	51.8
550	550	210	11.1	17.2	24	41.2	467	134	106	67120	2440	22.3	2670	254	4.45	442	54
600	600	220	12	19	24	43	514	156	122	92080	3070	24.3	3390	308	4.66	481	56.5

نیمرخ نیم پهن لانه زنبوری شده Cast IPE



A= سطح مقطع

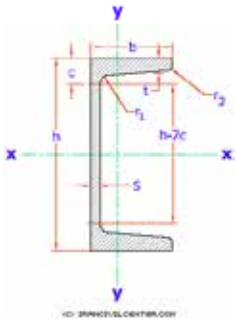
G= وزن واحد طول

I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

Cast IPE	h	H	s	t	A	G	I_{xa}	S_{xa}	F_b	I_{xb}	S_{xb}
	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m (per 1.5h)	cm^4	cm^3	cm^2	cm^4	cm^3
120	80	120	3.8	5.2	9.16	0.718	206	34.3	6.12	189	31.6
150	100	150	4.1	5.7	12.4	1.21	437	58.2	8.25	403	53.7
180	120	180	4.4	6.3	15.8	1.86	809	89.9	10.6	746	82.8
210	140	210	4.7	6.9	19.7	2.7	1370	131	13.1	1270	121
240	160	240	5	7.4	24.1	3.78	2200	184	16.1	2030	169
270	180	270	5.3	8	28.7	5.06	3330	247	19.1	3070	228
300	200	300	5.6	8.5	34.1	6.7	4910	327	22.9	4540	302
330	220	330	5.9	9.2	39.9	8.63	6990	423	26.9	6460	392
360	240	360	6.2	9.8	46.5	11	9790	544	31.7	9070	504
405	270	405	6.6	10.2	54.8	14.6	14550	719	37	13470	665
450	300	450	7.1	10.7	64.5	19	21010	934	43.2	19410	863
495	330	495	7.5	11.5	75	24.3	29580	1200	50.2	27330	1100
540	360	540	8	12.7	87.1	30.8	40890	1510	58.3	37780	1400
600	400	600	8.6	13.5	102	39.7	58290	1940	67.3	53700	1790
675	450	675	9.4	14.6	120	52.2	85430	2530	77.7	78290	2320
750	500	750	10.2	16	142	68.2	122400	3260	90.5	111800	2980
825	550	825	11.1	17.2	165	86.6	171100	4150	103	155700	3770
900	600	900	12	19	192	110	235300	5230	120	213700	4750

نیمرخ ناودانی UNP



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

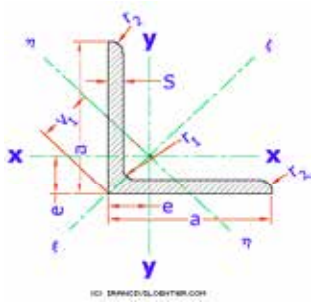
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

UNP	h	b	s	$t=r_1$	r_2	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	e_y	x_M	a_1
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm	mm
30x15	30	15	4	4.5	2	9	12	2.21	1.74	2.53	1.69	1.07	0.38	0.39	0.42	0.52	0.74	--
30	30	33	5	7	3.5	14.5	1	5.44	4.27	6.39	4.26	1.08	5.33	2.68	0.99	1.31	2.22	--
40x20	40	20	5	5.5	2.5	11	18	3.66	2.87	7.58	3.79	1.44	1.14	0.86	0.56	0.67	1.01	--
40	40	35	5	7	3.5	14.5	11	6.21	4.87	14.1	7.05	1.5	6.68	3.08	1.04	1.33	2.32	--
50x25	50	25	5	6	3	12.5	25	4.92	3.86	16.8	6.73	1.85	2.49	1.48	0.71	0.81	1.34	--
50	50	38	5	7	3.5	15	20	7.12	5.59	26.4	10.6	1.92	9.12	3.75	1.13	1.37	2.47	4
60	60	30	6	6	3	12.5	35	6.46	5.07	31.6	10.5	2.21	4.51	2.16	0.84	0.91	1.5	--
65	65	42	5.5	7.5	4	16	33	9.03	7.09	57.5	17.7	2.52	14.1	5.07	1.25	1.42	2.6	16
80	80	45	6	8	4	17	47	11	8.64	106	26.5	3.1	19.4	6.36	1.33	1.45	2.67	28
100	100	50	6	8.5	4.5	18	64	13.5	10.6	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47	1.55	2.93	42
120	120	55	7	9	4.5	19	82	17	13.4	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59	1.6	3.03	56
140	140	60	7	10	5	21	97	20.4	16	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75	1.75	3.37	70
160	160	65	7.5	10.5	5.5	22.5	116	24	18.8	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89	1.84	3.56	82
180	180	70	8	11	5.5	23.5	133	28	22	1350	150	6.95	114	22.4	2.02	1.92	3.75	96
200	200	75	8.5	11.5	6	24.5	151	32.2	25.3	1910	191	7.7	148	27	2.14	2.01	3.94	108
220	220	80	9	12.5	6.5	26.5	166	37.4	29.4	26900	245	8.48	197	33.6	2.3	2.14	4.2	122
240	240	85	9.5	13	6.5	28	185	42.3	33.2	3600	300	9.22	248	39.6	2.42	2.23	4.39	134
260	260	90	10	14	7	30	201	48.3	37.9	4820	371	9.99	317	47.7	2.56	2.36	4.66	146
280	280	95	10	15	7.5	32	216	53.3	41.8	6280	448	10.9	399	57.2	2.74	2.53	5.02	160
300	300	100	10	16	8	34	232	58.8	46.2	8030	535	11.7	495	67.8	2.9	2.7	5.41	174
320	320	100	14	17.5	8.75	37	247	75.8	59.5	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	2.6	4.82	182
350	350	100	14	16	8	34	283	77.3	60.6	12840	734	12.9	570	75	2.72	2.4	4.45	204
380	380	102	13.5	16	8	33.5	313	80.4	63.1	15760	829	14	615	78.7	2.77	2.38	4.58	227
400	400	110	14	18	9	38	325	91.5	71.8	20350	1020	14.9	846	102	3.04	2.65	5.11	240

نیمرخ نبشی با بال مساوی Angle Equal Leg



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

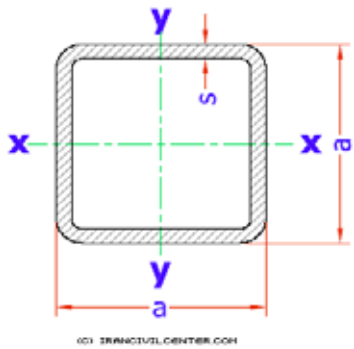
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

a X s	r_1	r_2	A	G	e	w	v_1	$I_x=I_y$	$S_x=S_y$	$i_x=i_y$	J_ξ	i_ξ	J_η	W_η	i_η
mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm	cm	cm^3	cm
20 X 3	3.5	2	1.12	0.88	0.6	1.41	0.85	0.39	0.28	0.59	0.62	0.74	0.15	0.18	0.37
20 X 4	3.5	2	1.45	1.14	0.64	1.41	0.9	0.48	0.35	0.58	0.77	0.73	0.19	0.21	0.36
25 X 3	3.5	2	1.42	1.12	0.73	1.77	1.03	0.79	0.45	0.75	1.27	0.95	0.31	0.3	0.47
25 X 4	3.5	2	1.85	1.45	0.76	1.77	1.08	1.01	0.58	0.74	1.61	0.93	0.4	0.37	0.47
25 X 5	3.5	2	2.26	1.77	0.8	1.77	1.13	1.18	0.69	0.72	1.87	0.91	0.5	0.44	0.47
30 X 3	5	2.5	1.74	1.36	0.84	2.12	1.18	1.41	0.65	0.9	2.24	1.14	0.57	0.48	0.57
30 X 4	5	2.5	2.27	1.78	0.89	2.12	1.24	1.81	0.86	0.89	2.85	1.12	0.76	0.61	0.58
30 X 5	5	2.5	2.78	2.18	0.92	2.12	1.3	2.16	1.04	0.88	3.41	1.11	0.91	0.7	0.57
35 X 3	5	2.5	2.04	1.6	0.96	2.47	1.36	2.29	0.9	1.06	3.63	1.34	0.95	0.7	0.68
35 X 4	5	2.5	2.67	2.1	1	2.47	1.41	2.96	1.18	1.05	4.68	1.33	1.24	0.88	0.68
35 X 5	5	2.5	3.28	2.57	1.04	2.47	1.47	3.56	1.45	1.04	5.63	1.31	1.49	1.01	0.67
35 X 6	5	2.5	3.87	3.04	1.08	2.47	1.53	4.14	1.71	1.04	6.5	1.3	1.77	1.16	0.68
40 X 3	6	3	2.35	1.84	1.07	2.83	1.52	3.45	1.18	1.21	5.45	1.52	1.44	0.95	0.78
40 X 4	6	3	3.08	2.42	1.12	2.83	1.58	4.48	1.56	1.21	7.09	1.52	1.86	1.18	0.78
40 X 5	6	3	3.79	2.97	1.16	2.83	1.64	5.43	1.91	1.2	8.64	1.51	2.22	1.35	0.77
40 X 6	6	3	4.48	3.52	1.2	2.83	1.7	6.33	2.26	1.19	9.98	1.49	2.67	1.57	0.77
45 X 4	7	3.5	3.49	2.74	1.23	3.18	1.75	6.43	1.97	1.36	10.2	1.71	2.68	1.53	0.88
45 X 5	7	3.5	4.3	3.38	1.28	3.18	1.81	7.83	2.43	1.35	12.4	1.7	3.25	1.8	0.87
45 X 6	7	3.5	5.09	4	1.32	3.18	1.87	9.16	2.88	1.34	14.5	1.69	3.83	2.05	0.87
45 X 7	7	3.5	5.86	4.6	1.36	3.18	1.92	10.4	3.31	1.33	16.4	1.67	4.39	2.29	0.87
50 X 4	7	3.5	3.89	3.06	1.36	3.54	1.92	8.97	2.46	1.52	14.2	1.91	3.73	1.94	0.98
50 X 5	7	3.5	4.8	3.77	1.4	3.54	1.98	11	3.05	1.51	17.4	1.9	4.59	2.32	0.98
50 X 6	7	3.5	5.69	4.47	1.45	3.54	2.04	12.8	3.61	1.5	20.4	1.89	5.24	2.57	0.96
50 X 7	7	3.5	6.56	5.15	1.49	3.54	2.11	14.6	4.15	1.49	23.1	1.88	6.02	2.85	0.96
50 X 8	7	3.5	7.41	5.82	1.52	3.54	2.16	16.3	4.68	1.48	25.7	1.86	6.87	3.19	0.96
50 X 9	7	3.5	8.24	6.47	1.56	3.54	2.21	17.9	5.2	1.47	28.1	1.85	7.67	3.47	0.97
55 X 5	8	4	5.32	4.18	1.52	3.89	2.15	14.7	3.7	1.66	23.3	2.09	6.11	2.84	1.07
55 X 6	8	4	6.31	4.95	1.56	3.89	2.21	17.3	4.4	1.66	27.4	2.08	7.24	3.28	1.07
55 X 8	8	4	8.23	6.46	1.64	3.89	2.32	22.1	5.72	1.64	34.8	2.06	9.35	4.03	1.07
55 X 10	8	4	10.1	7.9	1.72	3.89	2.43	26.3	6.97	1.62	41.4	2.02	11.3	4.65	1.06
60 X 5	8	4	5.82	4.57	1.64	4.24	2.32	19.4	4.45	1.82	30.7	2.3	8.03	3.46	1.17
60 X 6	8	4	6.91	5.42	1.69	4.24	2.39	22.8	5.29	1.82	36.1	2.29	9.43	3.95	1.17
60 X 8	8	4	9.03	7.09	1.77	4.24	2.5	29.1	6.88	1.8	46.1	2.26	12.1	4.84	1.16

نیمرخ قوطی مربع Square Tube



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

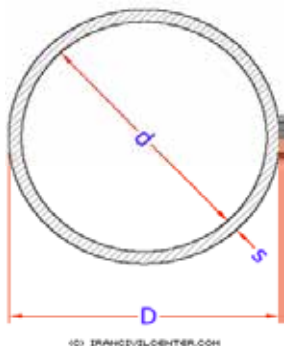
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

a X s	A	G	I	S	i
mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm
40 X 2.9	4.23	3.32	9.66	4.83	1.51
40 X 4	5.62	4.41	12.1	6.05	1.47
50 X 2.9	5.39	4.23	19.8	7.94	1.92
50 X 4	7.22	5.67	25.4	10.1	1.87
60 X 2.9	6.55	5.14	35.5	11.8	2.33
60 X 4	8.82	6.93	45.9	15.3	2.28
60 X 5	10.8	8.47	54.1	18	2.24
70 X 3.2	8.46	6.64	62.7	17.9	2.72
70 X 4	10.4	8.18	75.3	21.5	2.69
70 X 5	12.8	10	89.6	25.6	2.65
80 X 3.6	10.9	8.55	106	26.4	3.11
80 X 4.5	13.4	10.5	127	31.7	3.08
80 X 5.6	16.4	12.9	151	37.6	3.03
90 X 3.6	12.3	9.68	153	34	3.52
90 X 4.5	15.2	11.9	185	41	3.48
90 X 5.6	18.6	14.6	220	49	3.44
100 X 4	15.2	12	233	46.6	3.91
100 X 5	18.8	14.7	281	56.3	3.87
100 X 6.3	23.3	18.3	339	67.8	3.82
120 X 4.5	20.5	16.1	452	75.3	4.7
120 X 5.6	25.1	19.7	544	90.6	4.65
120 X 6.3	28	22	598	99.7	4.62
140 X 5.6	29.6	23.3	885	126	5.47
140 X 7.1	37	29	1080	154	5.4
140 X 8.8	45	35.3	1280	182	5.33
160 X 6.3	37.7	29.6	1460	183	6.23
160 X 8	47	36.9	1780	222	6.15
160 X 10	57.4	45.1	2100	263	6.05
180 X 6.3	42.8	33.6	2120	236	7.05
180 X 8	53.4	41.9	2590	288	6.97
180 X 10	65.4	51.4	3090	343	6.87
200 X 6.3	47.8	37.5	2960	296	7.86

نیمرخ لوله Round Tube



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

D X s	A	G	I	S	i_x
mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm
21.3 X 2	1.21	0.962	0.571	0.536	0.686
21.3 X 2.6	1.53	1.21	0.681	0.639	0.668
21.3 X 3.2	1.82	1.44	0.768	0.722	0.65
26.9 X 2	1.56	1.24	1.22	0.907	0.883
26.9 X 2.6	1.98	1.57	1.48	1.1	0.864
26.9 X 3.2	2.38	1.89	1.7	1.27	0.846
33.7 X 2.6	2.54	2.01	3.09	1.84	1.1
33.7 X 3.2	3.07	2.42	3.6	2.14	1.08
33.7 X 4	3.73	2.95	4.19	2.49	1.06
42.4 X 2.6	3.25	2.57	6.46	3.05	1.41
42.4 X 3.2	3.94	3.11	7.62	3.59	1.39
42.4 X 4	4.83	3.81	8.99	4.24	1.36
48.3 X 2.6	3.73	2.95	9.78	4.05	1.62
48.3 X 3.2	4.53	3.59	11.6	4.8	1.6
48.3 X 4	5.57	4.41	13.8	5.7	1.57
60.3 X 2.9	5.23	4.14	21.6	7.16	2.03
60.3 X 3.6	6.41	5.07	25.9	8.58	2.01
60.3 X 4	7.07	5.59	28.2	9.34	2
60.3 X 5	8.69	6.82	33.5	11.1	1.96
76.1 X 2.9	6.67	5.82	44.7	11.8	2.59
76.1 X 3.6	8.2	6.49	54	14.2	2.57
76.1 X 4	9.06	7.17	59.1	15.5	2.55
76.1 X 5	11.2	8.77	70.9	18.6	2.52
88.9 X 3.2	8.62	6.81	79.2	17.8	3.03
88.9 X 3.6	9.65	7.57	87.9	19.8	3.02
88.9 X 4	10.7	8.43	96.3	21.7	3
88.9 X 5	13.2	10.3	116	26.2	2.97
88.9 X 6.3	16.3	12.9	140	31.5	2.93
101.6 X 3.6	11.1	8.76	133	26.2	3.47
101.6 X 4.5	13.7	10.7	162	31.9	3.44
101.6 X 5.6	16.9	13.2	195	38.4	3.4

منابع و مآخذ:

۱- خاکی، علی، ایستایی ساختمان، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

۲- فرشاد، مهدی، مکانیک مهندسی - جلد اول: استاتیک، انتشارات پژوهش

۳- مریام، ج - ال، استاتیک، ترجمهٔ حمید لعل‌خو

۴- ENGINEERING MECHANICS STATICS,
J.T.MERIAM&L.G.KRAIGE, SEVENTH EDITION

۵- STATICS AND MECHANICS OF MATERIALS,
Ferdinand P.Beer&E.Russell Johnston, Jr.&John T.DeWolf&David F.Mazurek

۶- MECHANICS OF MATERIALS, Third Edition
ROY R. CRAIG, JR.

۷- فرشاد، مهدی، تاریخ مهندسی در ایران، انتشارات میرماه

۸- و سایت‌های مختلف اینترنتی مرتبط با موضوع